Polargeometrie, von Dr. Ernst Barthel. Mit 23 Figuren.
Barthel, Ernst, 1890-

Page [unnumbered]

Page [unnumbered]

Polargeometrie. Von Dr. Ernst Barthel. Mit 23 Figuren. Preis 4,50 M. BERLIN VW 57, Bülowstralse C;J Drulck und Verlag von Leonhard Simion Nf. 1919

Page [unnumbered]

Page [unnumbered]

Inhalt. Seite Vorwort...................... 7 Pädagogischer Brief.... 9 I. Der Grundgedanke und seine Beweise. ~ 1. Der Grundgedanke.......... 11 ~ 2. Eine Kritik..... 12 ~ 3. Gegner des Grundgedankens................ 13 ~ 4. Vorläufige Auseinandersetzung mit den Anhängern Euklids.. 13 5. Vorläufige Auseinandersetzung mit den Anhängern Hilberts. 14 ~ 6. Die Theorie Geißlers............ 14 ~. Zwei Wege der Grundlegung der Geometrie............ 15 8. Axiom und Definition....... 16 9. Die objektive Geometrie als logisch mögliche Geometrie.... 16 ~ 10. Die Definitionen der Geometrie im Verhältnis zur Erfahrung.. 17 ~ 11. Die dreizehn Definitionen der objektiven Geometrie..... 17 ~ 12. Deduktion der Eigenschaften von Parallelen......... 20 ~ 13. Ebener Beweis für den Grundgedanken...... 20 ~ 14. Deduktion der Parallelenschnittpunkte aus dem KIontinuitätsprinzip 21 15. Ursache des euklidischen Irrtums............. 22 ~ 16. Verhältnis der euklidischen Täuschung zur modernen Grundlegung der Geometrie.................... 23 ~ 17. Der Beweis des Grundgedankens durch die Hyperbel..... 23 ~ 18. Der Beweis des Grundgedankens durch den Satz von Pascal. 24 ~ 19. Der Beweis des Grundgedankens durch die trigonometrische Tangente.25 ~ 20. Auflösung eines trigonometrischen Paradoxons...... 26 ~ 21. Der Beweis des Grundgedankens durch die harmonische Teilung 30 ~ 22. Der Beweis des Grundgedankens durch den Apollonischen Kreis 31 ~ 23. Der Beweis des Grundgedankens durch die Parabel.... 31 ~ 24. Beweis aus der symmetrischen Entsprechung von Ellipse und Hyperbel...... 32 ~ 25. Beweis aus der geforderten Lückenlosigkeit der analytischen Gleichungen....................... 33 ~ 26. Beweis aus der Symmetrie überhaupt............ 33 ~ 27. Die B-Kegelschnitte.......... 34 ~ 28. Widerlegung eines Einwandes durch die Erfahrung.... 36 ~ 29. Nachweis der unendlich nahen Annäherung des Kreises an die Gerade............37 ~ 30. Nachweis der Identität dieses Annäherungsproblems mit dem eleatischen Pfeilproblem.................. 38 ~ 31. Erklärung des erkenntnistheoretischen Zwiespaltes durch das Bergsonsche Prinzip.................... 39

Page [unnumbered]

Seite ~ 32. Die Bewegung des Mittelpunktes im Annaherungsprozeß... 39 ~ 33. Eine auffällige Weg-Zeitgleichung............... 40 ~ 34. Beseitigung eines durch die Vorstellungstendenz veranlaßten Hindernisses................ 41 ~ 35. Beseitigung eines analytischen Einwandes......... 42 ~ 36. Beseitigung eines Einwandes der projektiven Geometrie.... 43 ~ 37. Das Gesetz von der Erhaltung derg eometrischen Elemente... 44 ~ 38. Die Insichgeschlossenheit von Gerade, Ebene und Raun.... 45 ~ 39. Lie mathematische Fruchtbarkeit der Polargeometrie...... 45 ~ 40. Die raumtheoretisch-astronomische Fruchtbarkeit der Polargeometrie......................... 4; II. Mathematische Folgerungen. A. Planimetrischer Teil. ~ 41. Der definite Unendlichkeitsbegriff der Polargeometrie.. 46 ~ 42. Der indefinite Unendlichkeitsbegriff der euklidischen Geometrie 47 ~ 43. Dührings Analyse des Unendlichkeitsbegriffes.......... 48 ~ 44. Dührings Gesetz der bestimmten Anzahl........... 49 ~ 45. Der algebraische Unendlichkeitsbegriff........ 50 ~ 46. Die

Verwandtschaft zwischen dem algebraischen und dem geometrischen Unendlich keitsbegriff........ 51 ~ 47. Die Kugeloberfläche als Anschauungsmittel der objektiven Planimetrie.......................... 52 ~ 48. Die Orientierung auf dem Globus.......... 52 ~ 49. Annahme einer endlichen Maßeinheit und Feststellung der Koordinatenbezeichnung................... 53 ~ 50. Demonstrierung der Paralleleneigenschaften auf der Kugel... 54 ~ 51. Die Gleichung der Geraden................ 54 ~ 52. Die Gleichung der Parallelen zu einer Achse und die Gleichung des Ebenenäquators................ 55 ~ 53. Der Verlauf der Hyperbel................. 56 ~ 54. Die konjugierte Hyperbel derselben Normalstellung als Gegenhyperbel der ursprünglichen................. 57 ~ 55. Bemerkung über die allgemeine Hyperbel......... 58 ~ 56. Die Darstellung der Totalebene durch die Lambertsche Münze 59 ~ 57. Darstellung des Verlaufes einer gleichseitigen T-y~pei-bel auf der Lambertschen Münze................... 60 ~ 58. Der Verlauf der Parabel und seine Darstellung........ 61 ~ 59. Eine neue Eigenschaft der Parabel.............. 63 ~ 60. Konstruktion des Ausdruckes |12 p 2 G ~ 61. Ellipse und Gegenellipse.............. 66 ~ 62. Näheres über die Gleichung xs2 + Y.'-... 66 ~ 63. Empfehlung der Benutzung einer Kugel....... 68 ~ 64. Ellipse, Parabel und Hyperbel in ihrem Zusammenhang.. 69 ~ 65. Die Gerade als Grenzfall von Ellipse, Hyperbel und Parabel.. 70 ~ 66. Das wesentliche Verhältnis von Gerade, Kreis und Punkt... 71 ~ 67. Die Arcusfunktion.........71 ~ 68. Das Paradoxon der scheinbaren Linearität einer Gleichung von Kurven zweiten Grades............ 73 ~ 69. Das reziproke Verhältnis zwischen unendlichem Radius und unendlicher Peripherie................... 7. 74

Page [unnumbered]

B. Stereometrischer Teil. Seite ~ 70. Kegel und Zylinder..................... 75 ~ 71. Die Zylinderschnitte................... 76 ~ 72. Das räumliche Strahlenbüschel................ 76 ~ 73. Der Begriff des Raumes.................. 77 ~ 74. Ein Gesetz der Raumbewegung...............78 ~ 75. Die Zwillingsgeraden.................... 78 ~ 76. Vindschiete Geraden eines Raumes.............. 79 ~ 77. Die Schnittlinie zweier Ebenen............... 80 ~ 78. Die Mehrzahl der Räumee................. 80 ~ 79. Die Logarithmen negativer Zahlen.............. 81 ~ 80. Die Dimensionenzahl des Raumes.............. 82 ~ 81. Die Reversionskugel als mathematisches Modell des Raumes..83 ~ 82. Die geradlinige Bewegung eines Punktes durch den Raum, ohne Modell angegeben.....................85 ~ 83. Dieselbe Bewegung des Punktes in Modell demonstriert.... 85 ~ 84. Angabe der drei Raumkoordinaten eines Punktes im Modell.. 86 ~ 85. Eigenart des Raumkörpers......... 8 ~ 86. Die Zeit als Grundbegriff der Polargeometrie......... 88 ~ 87. Die tiefere Ursache der Unvorstellbarkeit der unendlichen Totalität...... 89 ~ 88. Logik, Ethik und Geometrie als die apriorischen Wissenschaften. 90 ~ 89. Bedeutung des Gesetzes der Erhaltung der geometrischen Elemente für die Polargeometrie.91 ~ 90. Die Bedeutung der Lehrsätze der euklidischen Geometrie innerhalb der Polargeometrie.................. 92 ~ 91. Die Dreiteilung eines Winkels........... 93 ~ 92. Berechnung des Rauminhaltes in beliebigen Kubikeinheiten. 93 ~ 93. Empirischer Charakter der Polargeometrie......... 95

Vorwort. Nach einer Reihe von Vorarteiten in Prof. Dr. Steins ~Archiv für systematische Philosophie" 1916 ff. gebe ich hiermit die ausfihrliche Darstellung meiner als objektiv erkannten Polargeometrie. Ich tue es im Gnedenken an Robert Mayer und im Bewußtsein einer Pflic;ht. Zeitschriften werden gebeten, das Buch mit der Korrektheit zu behandeln, die man einer redlichen Sache entgegenbringt. Berichterstatter werden gebeten, sich der Einsicht, daß das Buch mit zureichendei Kenntnis der Ergebnisse der heutigen Mlathenmatik geschrieben ist, nichl.t zu verschließen. Die geneigten Leser aber werden gebeten, da.s Buch mit ihrer eigenen Urteilskraft zu durchdenken. Der Name Polargeometrie erklärt sich daraus, daß nach diesen System jedem Rautmpunkt- im "IUnendlichen"i ein ebenso bestimmter Itaumpunkt entspricht, so daß also der Raum eine polare, d. h. sym-:metrische oder dualistische, Struktur aufweist. Schiltigheim bei Straßburg i. E., Ostern 1918. Ernst Barthel.

Pädagogischer Brief. Herrn Prof. Dr. C. H., München. Sie schreiben mir, daß Ihnen, obwohl ich noch nicht Ihre persönliche Bekanntschaft gemacht habe, meine Polargeometrie wie Ihre eigene Sache am HIerzen liege, und daß Sie gesonnen seien, deren elementare Inhalte in Ihren Mathematikklassen praktisch durchzuarbeiten. Nichts könnte mir erfreulicher sein, als daß ein anderer Mathematiker das System in pädagogischer Breite vortrüge. Liegen doch auch hier die entscheidenden Punkte der wissenschaftlichen Lehre in den einfachsten Grundlagen, und es dürfte nicht ausbleiben, daß Ihre Schüler, wie Sie selbst es getan haben, die Wahrheit und Schönheit der Polargeometrie sowie deren Überlegenheit für das Verständnis des geometrisch ~Unendlichen" erkennen. Die Schüler können unbedenklich mit der Polargeometrie bekannt gemacht werden, da sie den sicheren Teilen der allgemein verbreittetn Lehre in keiner Weise widerspricht, sondern nur eine besondere Akzentuierung der Dinge neu einführt, aus welcher eine Vereinfachung hervorgeht. Da mein Buch nicht unmittelbar in pädagogischer Absicht verfaßt ist, möchte ich mir erlauben, Sie auf die Paragraphen zu verweisen, die in der Schule von Wert sein dürften. Man wird dieselben den Schilern in einfachster Breite ausführen und wohl auch eine straffere Systematik im Sinne der gebräuchlichen Schulbücher eintreten lassen. Ausgangspunkt bleibt immer der Satz: ~Geometrie gründet sich nicht auf logische, sondern auf geometrische Grundlagen, d. h. auf die einfachsten geometrischen Anschau

Page 10

ungen und Prozesse. Die Logik ist n:r das Hilfsmittel der Geometrie, richt deren Grundlage". Daraufhin folgen sogleich die dreizehn Definitionen des ~ 11 und die Deduktion der Paralleleneigenschaften. Wenn die Parallelenfrage in Quarta nach Riemann-Helmholtz statt nach Euklid gelöst wird, ist der Boden für die später zu erlernende projektive Geometrie schon vorbereitet, und der Schüler bleibt mit den inneren Widersprüchen, zu denen der euklidische Standpunkt führt, verschont. Die reichliche Verwendung von Anschauungsmaterial (Kugel und Lambertsche Münze) ist im Text empfohlen. Die Auswahl des Stoffes fiür die verschiedenen Klassen möchte ich Ihnen selbst überlassen. Es dürfte von Quarta bis Prima jede Stufe irgendwie mitbeteiligt sein. Die pädagogisch in Betracht kommenlden Paragraphen sind folgende: ~~ 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55 6, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 89, 90, 91. Um Polenlik und andere Theorien wird man sich in der Schule grundsätzlich nic(ht kiimmern, außer in dem einen Falle, wo man den Schülern mitteilt, daß Euklid eine Parallelenlehre aufgestellt hat, nach welcher es in einer Ebene nichtschneidende Gerade gibt, daß er also die Analogie und Kontinuität zwischen Kugelhauptkreisen und Geraden noch nicht ahnte. Man kanll den Schlilern weiter mitteilen, daß die Annahme Euklids vonr parallelen Geraden, die einander iberhaupt nicht schneiden, sondern inmer gleichen Abstand behalten, im täglichen Sprachgebrauch Fuß gefaßt hat (man spricht von ~parallelen" Eisenbahnschienen, von,parallelen" Peripherien konzentrischer Kreise usw.), und daß auch die Wissenschaft die Theorie Euklids bis vor kurzem noch nicht preisgegeben hatte, sondern, an diese Theorie komplizierte logische Untersuchungen anknüpfte, von denen aber nur gesagt wird, daß wir ohne sie auskommen. E. B.

I. Der Grundgedanke und seine Beweise. ~ 1. Der Grundgedanke. Die innere Konsequenz der Geometrie erfordert gebieterisch, daß die euklidische Parallelenlehre auf Schulen und Universitäten mit aller Deutlichkeit als objektiv uinzutreffentd preisgegeben und ersetzt werde durch eine an Desargues und Rlieilnanni anknilpfende neue Parallelentheorie. Die euklidische Parallelenlehre definiert Parallelenl als ei.nander nichtschneidende Goraden einer Ebene. Die neuo Parallelenlehre, welche in der pro.jektiven Geometrie vorgebildet ist'), faßt dagegen die Eboene als Grenzwert einer Kugelschar auf, lehrt also, daß nichtschneidende. Geraden einer Ebene nicht existieren können. Nach ihr haben je zwei Geraden einer Ehene wie zwei Hauptkreise einer Kugel zwei reelle Schnittpunkte. In der Lehre Eulids besteht zwischen den Punkten 0 und ^ der analytischen Geometrie ein Wesensunterschied. 0 ist ein besti1mmter Punkt, c ist ein unbestimmter Punkt, liegt immer noch weiter entfernt als jeder angebbare bestimmte Punkt der Ebene. In der hier gebotenen Lehre dagegen besteht zwischen den Punkten 0 und G volle Gleichartigkeit und Gleichherechtigung. Beide sind bestimmte Punkte der Ebene. Unbestimmte Punkte gibt es überhaupt nicht, sind ein Widerspruch in sich selbst. Der Punkt + ^x hat alle geometrischen Eigenschaften eines beliebigen anderen Punktes der Ebene, zum Beispiel des Punktes + 0. Man kann von ihm aus die Richtungen nach rechts, links, oben, unten. vorn und hinten unterscheiden. Man kann durch ihn ein Strahlenbüischel legen. Ma,n kann) Desargues urn die projektive (Gomiuetrie vertreten immplizite eiten antieuklidiseJlici Standpunkt. Sie sr:c(.lhen nicht ausdrücklich aus, aber betätigen, daß es richtschneidende (Ieraden einer Ebene nicht gibt.

~129a Ernst Bartliel, sich am Punkte + - stehend denken, wie man sich am Punkite + 0 stehend denken kann. Die niedere und höhere Miathematik erkennt längst an, daß die Größen + 0 und:

c1t einander in jeder Hinsicht reziprok entgegengesetzt und gleichberechtigt sind. Die hier gebotene geometrische I,ehre ist nichts weniger als ein Umsturz der bestehenden Errungenschaften, sondern lediglich eine Ausscheidung unwissenschaftlicher Einsprengungen in die bisherige Lehre. Die Geometrie wird erst voll und ganz exakte Wissenschaft, wenn e die nlosik, dieman bisher noch an ihrem Horizont bemerkte, bis auf den letzten Rest vertrieben werden. Die Tendenz, alles Indefinite ans der Geometrie zu verbannen, wird man, wie immer ma-n sich zum Inhalt des Systems stellen mag, als eine Bestrebtung anerkennen missen, die dem Lauf der. nmodernel Entwicklung konform geht. 2. Eine Kritik. Der Mathemarntiker, der diese Dinge liest, ifüilt sich im ersten Augenblick zu dem Urteil bewogen, daß der Gedanke längst dagewesen sei. Vorliegendes Buch wäre in diesem Falle, wie es scheint, iiberflüssig. SDoch ist die Kritik aus folgenden Grilnden utmöglieh. Es ist natirlich richtig, daß der Inhalt des Buches nicht in dein Sinne neu ist, daß er in der seitherigen Entwickltug der Maithematik gar keine Anknüpfungspunkte besäße. Im Gegenteil gibt das Buch einem Gedanken eine eigenartig konsequente Wendung, der in der neueren Geometrie langscun herangekeinmt ist und in sporadischer Form jedem 3Mathematiker bekannt war. Daß die Ebene der Grenzwert einer Kugeloberfläche ist, braucht der Welt nicht mehr als Neuigkeit verkindet zu werden. Aber das Buch mill auch etwas ganz anderes. Es will die Unvereinbarkeit dieses Gedankens mit der euklidischen Geometrie deutlich machen. Es will ferner die Unerläßlichkeit des Gedaniikens dazu benutzen, die Vielheit der logisch möglichen Geonmetrien auf eine einzige geometrisch mögliche Geometrie zu reduzieren. Es will schließlich Iach die Konsequenzen aus dem Gedahken ziehen, die, so nahe sie liegen, niemals gezogen worden sind, weil sich die Aufmerksamkeit der Mathematik nicht mit geeigneter Stärke

Page 13

Polargeonetrie. 1.3. auf den wichtigen Punkt konzentrierte, und das wahrscheinlich deshalb, weil er so einfach ist. Die Berechtigung dieses Buches wird bewiesen: a) Durch die Tatsache, daß auf den Schulen noch die nachweislich falsche Parallelenlehre Euklids gelehrt wird. b) Durch die Tatsache, (laß die geometrische Grundlagenforschung bei einer Vielheit von logisch möglichen Geonetrien stehen zu bleiben lehrt und sich also jeder Aussage über die objektiven Eigenschaften des Raumes enthält. c) Durch die Tatsache, daß die mathematischen Einzelfolgerungen aus dlen Gedanken noch niemals ausgesprochen worden sind. ~ 3. Gegner des Grundgedankens.

Dieser Grundgedanke ist in folgenden ausführlich zu beweisen und gegen Andersdenkende in Schutz zu nehmen. Als Gegner koinmen in Betracht: 1. Die zahlreichen Anhänger der euklidischen Paralllelnlehre, die etwa durch Eugen)Dühring repräsentiert sein mögen. Ein Teil von ihnen ist der Ansicht, daß die neue Parallelentheorie gegen feststehende Grundwahrheiten der Analytik und der projektiven Geometrie verstoßen würde. 2. Die Vertreter der miod.ernen geometrischen Grundlagenforschung, als deren Repräsentant Hlilbert gelten möge. Diese halten auf Grund vermeintlicher logischer Erfordernisse jele objektive Eindeutigkeit in der Geometrie fir unmöglich. ~ 4. Vorläufige Auseinandersetzung mit den Anhängern Euklids. Unter den,Anhängern Euklids" verstehe ich iMathematiker, die die nichteuklidischen Geometrien als wertlose Scholastik betrachten, das euklidische System also für einzig richtig halten. Der Verfasser darf bestimmt hoffen, daß er diese Gruppe durch die Wucht seiner Gründe für den neuen Standpunkt gewinnen wird. Denn es handelt sich um klare Sachverhalte, die dazu nötigen, daß man die euklidische Parallelenlehre mit der neuen vertausche, und zwar nicht bloß nebenbei, sondern überall und grundsätzlich.

 ~ 5. Vorläufige Auseinandersetzung mit den Anhängern Hilberts. Unter den„Anlhängern Hilberts" verstehe ich Miathenmabiker, die die Gleichberechtigung der drei logisch möglichen Geometrien lehren, sich also jeder sachlichen Bevorzugung eines der drei Systeme enthalten. Maan hä,tte sie ebenso gut als Anhänger Liebmanns, Poincares, Couturats bezeichnen können. Sie vertreten die jetzige Hauptströmung. Diese Gruppe von Gegnern wäre enttäuscht, wenn die Vielheit der,logisch einwandfreien Geometrien", wie sie durch Euklid, Lobatschewsky-iBolryai, Klein-Clifford, Riemann-IHelmholtz geschaffen worden sind, zu einer einzigen objektiv eindeutigen Geometrie reduziert werden würde. Daß das Problem wichtig ist, bezweifclt in diesem Kreise nielmand. Wellstein (Enzyklopädie Bd. II S. 131) spricht der Frage der objektiven Eindeutigkeitsgeometrie eine,gewaltige Tragweite" zu. Irgend eine begründete Stellungnahme dieser Gruppe zu dem neuen Lösun.gsversuch wäre wünschenswert, weil sich diese Gedanken dein m1enschlichen Geiste doch immer wieder aufdrängen werden. Die sachliche Überlegenheit der Riemann-Helmholtzschen Geometrie über die andern,.logiseh möglichen" Geometrien dürfte nach den Ausführungen dieses Buches keinem Zweifel mehr unterliegen. Vgl. hier auch schon ~ 20. ~ 6. Die Theorie Geißlers. Dr. Kurt Geißler vertritt in mehreren Büchern eine Theorie, die sich weder zu den Hilbertschen

Grundlagen, noch ohne weiteres zu Euklid bekennt. Der Verfasser stellt die Lehre auf, daß für die gewöhnliche„Weitenbehaftung", d. h. Mhaß-Sphäre, die euklidische Geometrie im Rechte sei, während für eine Weitenbehaftung höherer Ordinung die Lobatschewskysche Annahme (ines ganzen Biishels Nichtschneidender Geltung habe. Dieser Standpunkt dürfte folgender Kritik unterliegen: 1. Geißler nimmt in der Geometrie eine Endlosigkeit an, ohne alle elementarlogischen Kriterien befragt zu haben, ob das zulässig ist. Unser Buch dagegen fragt sich, ob man auf Grund einer klaren Logik berechtigt ist, nichtschneidende Geraden einer Ebene an

Polargeometrie. 15 zunehmen. Und es kommt zu dem vielfach begründeten Schluß, d:aß dies nicht der Fall ist. Daraus ergibt sich der definite Charakter des geometrisch Unendlichen. 2. Die Geißlersche Behauptung, auch der Unterschied von„Gekriümmt" uind„Ungekrümmt" sei nur relativ und miisse noch durch Angabe der Weitenbehaftung präzisiert werden, scheint mir ein Verstoß gegen die Fundamente der geometrischen Urteilskraft. Entweder ist eine Linie gerade oder krumm, und zwar dies im absoluten Sinne. ~ 7. Zwei Wege der Grundlegung der Geometrie. Die jetzige Grundlagenforschung führt die Geometrie auf Axiome zurück, d. h. auf eine geringe Zahl nicht beweisbarer, hypothetisch angenommener Voraussetzungen. Diese Axiome werden derart gewählt, daß sie zusammen ein widerspruchsloses System ermöglichen. Widerspruchslosigkeit ist also das oberste Kennzeichen eines wissenschaftlich berechtigten Systems der Geometrie. Und da es tatsächlich mehrere Geometrien gibt, welche im. rein logischen Sinne widerspruchslos sind, so folgt für diesen Standpunkt, daß nicht ausgemacht werden kann, welche Geometrie objektiv zu Recht besteht. Es gibt aber einen zweiten Weg der geometrischen Grundlegung der bisher vernachlässigt wurde und hier beschritten werden wird. Er geht nicht von willkürlich gewählten Axiomen aus, sondern von einer geringen Anzahl von Definitionen, welche de m Sprachgebrauch entsprechen und sich mit den durch sie gemeinten objektiven Denkund. Vorstellungsinhalten in kongruenter Weise decken. Aus den denknotwendigen Definitionen der geometrischen Fundamentalgrößen werden alle geometrischen Schlüsse mit eindeutiger Notwendigkeit gezogen. Auch die Frage nach dem gegenseitigen Verhalten zweier Senkrechten auf derselben dritten Geraden einer Ebene wird auf der neuen Standpunkt nicht mehr durch Axiome ad libitum entschieden, sondern durch klaren geometrischen

Schluß eindeutig gefolgert. Zusammenfassend kann also gesagt werden: Der logistische, axiomatische, nominalistische, subjektivistische, zur Vieldeutigkeit führende Weg der geometrischen Grundlegung wird vom Verfasser mit vollem Bewußtsein preisgegeben, da er eine solide,

16 Ernst Barthel, d. h. eindeutige Fundierung der Geometrie nicht erlaubt, und da es einen anderen Weg gibt, der dieses Erfordernis auf das beste erfüllt. Der neue Weg hat im Gegensatz zu dem erstgenannten einen rein geometrischen, definitorischen, realistischen, objektiven Charakter und führt zur Eindeutigkeit. Auf Grund der rein formalen, axiomatischen Behandlung der geometrischen Grundlagen wären drei Geometrien möglich Die Mitbericksichtigun? der geometrischen Kontinuität führt aber zu d m Ergebnis, daß unter diesen drei Geometrien eine einzige den Vorzug verdient, nämlich die von Riemann. ~ 8 Axiom und Definition. Die Axiome, d. h. unbeweisbaren Grundsätze, welche einer Spezialwissenschaft zugrundeliegen, können nur die Voraussetzungen des allgemeinen Menschenverstandes sein, welche niemand im Ernst bezweifelt und auch nur ein Logiker aufzuzählen sich die {Mühe machen wird. Statt aller dieser Axiome kann der kategorische Imperativ gelten: Gebrauche deinen Verstand. Außer auf dem Verstand beruht jede Spezialwissenschaft nur auf der Erfahrung und auf Definitionen. Die Polargeometrie beruht auf dreizehn einfachen und unbestreitbar dem Sprachgebrauch entsprechenden Definitionen. Aus ihnen läßt sich das ganze System einschließlich der Paralleleneigenschaften folgern, ohne daß man besondere Axiome zu Hilfe nilmmt. Daß Euklid sein berühmtes Buch auf Definitionen und auch auf Axiome gründen mußte, ergibt sich aus der mangelhaften Art seiner Definitionen, besonders der Geraden. Die moderne geometrische Entwicklung seit Desargues hat uns über die objektiven Erfordernisse der Geometrie erst die Augen geöffnet. Keinesfalls darf man sich heute Euklids Methode zur dogmatischen Lehre gereichen lassen. Man muß vielmehr die Geometrie ohne Axiome, bloß auf Grund von allgemeinverbindlichen Definitionen, neu schaffen. Dies soll im Prinzip hier geschehen. ~ 9. Die Polargeometrie als logisch mögliche Geometrie. Da der logische Weg der Grundlagenforschung den begründeten Anspruch erhebt, alle logisch möglichen Geometrien aufzählen zu kIönnen, so kann ihm auch diejenige Geometrie, welche hier als Polar

Polargeomnetrie. 17 geometrie vorgetragen wird, nicht ganz unbekannt sein. In der Tat hat er in der Riemannschen Geometrie, der sog. elliptischen, ein System erzeugt, das sich in seinen Voraussetzungen mit den objektiven Anforderungen deckt. Es verdient jedoch bemerkt zu werden, daß die projektive Geometrie den Gedanken, daß Parallelen-'sich schneiden, und zwar in zwei Punkten, schon seit Desargues implizite vertreten hat und daher als die wahre Erfinderin des,,Riemannschen"' Axioms angesprochen werden muß. Trotzdem, die Polargeometrie also im Prinzip "schon längst dagewesen" ist, ist doch das Wichtigste an ihr, nämlich ihre Objektivität, niemals behauptet und bewiesen worden. Auch hat sich noch kein Elementargeometer die Mühe gemacht, die Geometrie nach dm. Riemannschen Grundsatze bis in das Kapitel von den Kegelschnitten oder bis zur Definition des Tnendlichkeitsbegriffes wirklich auszudenken. Diese Arbeit fördert viel Neues zutage. ~10. Die Definitionen der Geometrie im Verhältnis zur Erfahrung. Wenn man an der Welt von allem abstrahiert, außer von Gestalt und Maß, so bleibt eine geometrische Idee zurück. Diese Idee hat objektive Existenz, obwohl sie durch Abstraktion gebildet worden ist. Die geometrische Idee ist also ein Gegenstand der Erfahrung. Die Definition der Idee durch Einfühlung in dieselbe verändert an der Idee nichts, sondern übersetzt die Idee bloß in die Sprache der Worte. Die Geometrie ist somit das in Worte gefaßte logische System von den objektiven Gesetzen der geometrischen Ideen. Die Geometrie ist also nicht, wie Poincare paradoxerweise behaupten zu müssen glaubt, ungewisser als eine Erfahrungswissenschaft. Sie ist objektiv eindeutig und denknotwendig. ~ 11. Die dreizehn Definitionen der Polargeometrie. I. Das Ungekrümmte oder Gerade ist der kontinuierliche Übergangswert zwischen dem Konkaven und dem Konvexen. Fig. 1. 2

13S Ernst Barthel, II. Das Rechtwinklige oder Senkrechte ist der ungekriimmte kontinuierliche Übergangswert zwischen dum Rechts und dem Links. Fig. 2. HI. Eine Dimension ist ein durch die Begriffe I und 1. erzeugter Ordnungsbereich endlos vieler gleichartiger geometrischen Größen. IV. Ein Punkt ist eine geometrische Wirklichkeit, deren Idee nulldimensional ist. V. Eine Linie ist eine geometrische Wirklichkeit, deren Idee eindimensional ist. VI. Eine Fläche ist eine geometrische Wirklichkeit, deren Idee zweidimensional ist. VII. Ein Raum ist eine geometrische Wirklichkeit, deren Idee dreidimensional ist.

&erade VIII. Eine Gerade ist eine in ihrer ganzon Ausdehnung un~ gekrümmte Linie. Fig. 3. IX. Eine Ebene ist eine in ihrer ganzen Ausdehnung ungekrümmte Fläche. X. Parallel heißen für einen gewissen Beobachtungsort solche Geraden oder Ebenen, die auf einer dritten Geraden, welche den Ort der Beobachtung festsetzt, senkrecht stehen. XI. Unendlich im geometrischen Sinne nenne ich die durch den Begriff X objektiv bestimmte Maßkonstantel).,) Vgl. Anmerkung zu S. 24.

Polargeometrie. 19 XII. Strecke nenne ich den Teil einer Geraden, der von zwei verschiedenen Punkten dieser Geraden begrenzt wird. Ihr absolutes Maß ist ein bestimmter Bruchteil der Länge ~unendlich". XIII. Winkel nenne ich den Teil einer Ebene, der von zwei verschiedenen Geraden dieser Ebene begrenzt wird. Sein absolutes.Maß ist ein bestimmter Bruchteil des Halbkreiswinkels von 180 Grad. Anmerkung zu Definition I. Man könnte vielleicht geneigt sein, zu bestreiten, daß es einen kontinuierlichen Übergangswert zwischen dem Konkaven und dem Konvexen überhaupt gibt. Auf diesen Einwand sei erwidert, daß das Prinzip der Kontinuität im wissenschaftlichen Denken nicht ohne zwingende Gründe aufgegeben werden darf. Es ist eines der wesentlichsten Kennzeichen wissenschaftlichen Denkens, daß es die Erscheinungen in kontinuierliche Funktionszusammenhänge zu bringen sucht. Nur das noch völlig kindliche Denken wird zwischen gekrümmten und ungekrümmten Linien oder Flächen einen Wesensgegensatz annehmen. Der Sprachgebrauch allerdings und die gewöhnliche Anschauungspsychologie (vgl. Fig. 10) gehen von der Voraussetzung aus, daß gekrümmte und ungekrümmte Linien einander so fremd seien wie zwei Welten, die sich gar nicht in Beziehung setzen lassen. Die erste Regung des wissenschaftlichen Denkens überwindet eben diese populäre Meinung, indem sie erkennt, daß zwischen regelmäßig gekrümmten geometrischen Wirklichkeiten (Kreisen und Kugeln) und absolut ungekrimmten geometrischen Wirklichkeiten ein kontinuierlicher Funktionsübergang besteht, daß also das Ungekrümmte nur ein Spezialfall des ununterbrochenen Funktionsverlaufes der konkavkonvexen Allgemeinheit ist. Wellstein behauptet, man könne nicht wissen, was eine Gerade sei, da sie in der Natur nicht vorkomme, außer etwa an Kristallkanten. Darauf ist zu erwidern, daß der Unterschied von Gerade und Krumm einen Gegensatz im Bewußtsein darstellt, der nicht aus der Natur erworben wird, sondern auf Grund dessen wir die Natur als gerade oder krumm beurteilen. Die Begriffe ~Gerade" und

"Krumm" sind eindeutige Kategorien im Sinne Kants. Die gegebene Definition des Geraden hat auch keinen der bei Schur (Grundlagen der Geom. S. 3) erwähnten iN-achteile. 2*

20 Ernst Barthel, ~ 12. Deduktion der Eigenschaften von Parallelen. Da nach Definition I, VIII und IX Geraden und Ebenen kontinuierliche Grenzwerte von gleichmäßig gekrümmten Linien und Flächen, d. h. von Kreisen und Kugeln, sind, so ergibt sich notwendig, daß die arithmetische Anzahl, welche für Geradenschnittpunkte- einer Ebene in Betracht kommt, keine andere sein kann als die Anzahl der Schnittpunkte von Kugelhauptkreisen auf einer Kugeloberfläche. Folglich haben zwei parallele Geraden (vgl. Def. X) zwei reelle Schnittpunkte, die in entgegengesetzter Richtung von der Parallelitätsstelle liegen. Es folgt ferner aus denselben Prämissen, daß überhaupt je zwei Geraden einer Ebene sich in zwei Punkten schneiden und in der M'itte zwischen diesen beiden Punkten parallel sind. Einwände dagegen sind später zu widerlegen. Es ist nunmehr bereits der Beweis geliefert, 1. daß die euklidische Parallelenlehre, wclche nichtschneidende Geraden einer Ebene annimmt, mit Schimären operiert. 2. Daß die moderne Bestim.mung der Eigenschaften von Parallelen durch willkürlich gewählte Axiome nicht die letzte Entscheidung liefern kann, weil nur eines von diesen Axiomen, nämlich das Desargues-Riemann-Helnmholtzsche Axiom, sich als Resultat geometrischer Deduktion ergibt, also objektiv berechtigt ist. Die Geometrie von Lobatschewsky-Bolyai, welcht. sogar mehrere Nichtschneidende durch einen Punkt P bezüglich einer Geraden g annimmt, ist, wenn man so sagen darf, noch falscher als die Geometrie Euklids. Die Geometrie von Klein-Clifford schließlich, welche einen einzigen Parallelenschnittpunkt annimmt, bedeutet. zwar gegenüber Euklid eine gewisse Annäherung an die Objektivität,. ist aber durch obige ebenso zwingende wie einfache Deduktion ebenfalls widerlegt. ~ 13. Ebener Beweis für den Grundgedanken. M1 und M2 seien die Mittelpunkte der Peripherien P1 und P2 Si und S, seien die Schnittpunkte der Kreise, t1 und t2 die Tangenten im Punkte S1. Man denke sich unter Festhaltung des Punktes S1 sowie der Tangenten t, und t2 den Radius der Kreise beschleunigt vergrößert.

Polargeometrie. 21)Dann schmiegen sich die Peripherien P1 und P2 immer mehr an.-die Tangenten t1 und t, an. Gleichzeitig bewegt sich der Schnittpunkt S in Richtung R vorwärts. WeOnn nun schließlich der nicht zu ver- neildende Fall eintritt, daß P1 und P mit t, und t2 zusammenfallen, so kann S2 nicht plötzlich von i /)Z der Ebene verschwinden, sondern es bleibt reeller zweiter Schnittpunkt der in t1 und t, übergegangnenl Peripherien P1 und t zZ P2. Folglich haben irgend zwei Fig. 4. Creraden t, und t2 einer Ebene nicht bloß einen, sondern zwei Schnittpunkte. ~ 14. Deduktion der Parallelenschnittpunkte aus dem Kontinuitätsprinzip.,~Natura non facit saltus", sagten die alten Forscher. Die neueren foinmulieren diesen Satz methodisch, indem sie die Forderung aufstellen, in keinem Funktionsverlauf der Natur und des Denkens gewaltseme Sprünge anzunehmen, außer an solchen Stellen, wo dies auf Grund objektiver Kriterien notwendig sein sollte. Die Kontinuitat ist vielleicht ein Naturgesetz; sicher aber eine methodische Forderung. 5Nun aber wäre das Kontinuitätsprinzip durchbrochen, wenn Parallelen keine Schnittpunkte haben wiiiden. Dies ist leicht einzusehen.,4_\ 9. - Fi^. 5. Punkt P und Gerade g seien gegeben. Es seien gl, g>, g3-,, Geraden durch P, welche g in P, P2, P3,.... schneiden. Je weiter sich die Gerade an die Parallele p annähert, desto weiter entfernt sich ihr Schnittpunkt mit g in der Richtung R. Wenn nun die Parallele p

 selbst mit g gar keinen Schnittpunkt hätte, so würde sie gegenüber dem ihr benachbarten Strahl gn des Strahlenbüschels einen plötzlichen, ungeheuren Sprung machen. Da aber die Annahme dieses geradezu grotesken Sprunges durch keine Tatsachenerwägung notwendig gemacht wird, sondern da im Gegenteil alle geometrischen Zusammenhänge nur beim Fehlen eines solchen Sprunges glatt und klar sich zusamxnenfügen, müßte man in der Tat sehr schlecht beraten sein, wenn man die Geometrie durch die Annahme, daß p und g sich niemals schneiden, aus den Fugen sprengen würde. Aus dem Kontinuitätsprinzip, welches durchaus nicht bloß ein subjektiver Wahn ist, sondern vielmehr ein Mittel, daß das Denken mit der natürlichen Struktur der Dinge konform bleibe, folgt ohne Zweifel die Existenz von Parallelenschnittpunkten. Daß hierbei die beiden in Betracht. kommenden Schnittpunkte nicht in einen einzigen zusamrmenfallen, muß nach ~ 11 bewiesen werden. ~ 15. Ursache des euklidischen Irrtums. Wenn die Annahme nichtschneidender Geraden einer Ebene in der Tat eine so gefährliche Sache ist, welche geradezu dein geometrischen Kausalgesetz widerspricht, so ist es besonders merkwürdig, daß die Gelehrten vieler Jahrhunderte diese irrtüm.liche Ansicht vertreten haben. 1Man wird sich die Ursache dieser Erscheinung überlegen. N-un kann aber jeder an sich selbst diese Ursache lebhaft nachfühlen. Linien, die sich erst in so ungeheuer großer Entfernung schneiden, daß das Auge selbst bei weitem Horizont nicht imstande ist, ihre Konvergenz zu bemerken, wird das natürliche Urteil als überhaupt nichtschneidend bezeichnen. Parallelen unterstützen dieses Urteil noch dadurch, daß sie im Strahlenbüschel eine symmetrisch ausgezeichnete Lage innehaben. Bei dein naturgemäßen Falschurteil der Sinne bleibt man, bis später die Argamente des Vorstandes diesen Standpunkt korrigieren. Die euklidische Parallelenlehre beruht auf einem sinnlich begründeten Urteil, auf einer Verstandestäuschung, die erst seit dem 16. Jahrhundert angefangen hat, durch die rationale Aufklärung abgelöst zu werden. Diese Aufklärung ist durch die Polargeometrie beendet. Euklids Parallelenlehre vernachlässigt die Kontinuität und Erha:ltung der geometrischen Elemente und enthält einen Traun be Standteil. Sie ist ein Irrtum des antiken Mathematikers. (Vgl. ~ 14, ~ 37.)

Polargeometrie. 23 ~ 16. Verhältnis der euklidischen Tauschung zur modernen Grundlegung der Geometrie. Euklid ist nicht nur der Vater der euklidischen, sondern auch der nichteuklidischen Geometrien. Hätte Euklid die Gerade nicht als geometrisches Wunder inauguriert, indem er sie ohne jeden Zusammenhang mit dem Kreise behandelte, und hätte er nicht außerd m die Parallele aus Rand und Band springen lassen, so hätten sich die Modernen diesen Wunderglauben auch nicht zum Beispiel genommen. So aber wurde durch die eine berühmte Autorität die ganze Wissenschaft in ein unvorteilhaftes Geleise gelenkt. Es ist vollkommen verfehlt, das Parallelenproblcm unabhängig vom geometrischen Zusan.menhang zu behandeln. Keine Naturwissenschaft wäre jemals so unkritisch, daß sie über ein Phänomen willkürlich vorurteilte, ohne es nach allen Seiten studiert zu haben. Das gegenseitige Verhalten zweier Parallelen läßt sich zwar nicht direkt in der Erfahrung beobachten, wohl aber zuverlässig aus der Erfahrung indirekt ableiten. Das geschieht, indem man sich darüber klar wird, daß Ebenen und Geraden objektiv Grenzwerte von Kugeloberflächen und Kreisen sind, daß also die erfahrungsgemäße Anzahl der Schnittpunkte zweier Hauptkreise auf der Kugel sich auf die zu erschließende Anzahl der Schnittpunkte zweier Geraden übertragen läßt. Das Parallelenproblem muß auf Grund. sicherer indirekter Erfahrung gelöst werden, darf aber nicht durch logistische Axiomatik zur Unlösbarkeit verurteilt bleiben.

Daß also auch für die moderne Grundlagenforschung die Thesen dieses Buches von Belang sind, unterliegt keinem Zweifel. ~ 17. Der Beweis des Grundgedankens durch die Hyperbel. Die Hyperbel ist wie die Ellipse zweifellos, und wie allgemein zugegeben wird, eine einzige Kurve. Sie besteht aber aus zwei Ästen, die sich nach entgegengesetzten Richtungen der Ebene voneinander ent- ^zkerkst \\at fernen. Wurden diese Äste nicht einen durch das ~Unendliche" geschlossenen Linienzug bilden, so wäre offenbar die Fig. 6.

i.24 Ernst Barthel, Einheit der Hyperbel zerstört. Das kann nicht sein. Folglich müssen die beiden Äste einer Hyperbel durch das "Unendliche" irgendwie ineinander übergehen. Das kann nur dann geschehen, wenn die Ebene selbst in sich selbst zurückläuft, d. h. nicht endlos istl). Dieses aber kainn nur dann stattfinden, wenn zwei Parallelen sich in bestimmten Punkten schneiden. Also ist die Hyperbel ein Beweis dafür, daß dis Euklidische und die Lobatschewsky- Bolyaische Parallelentheorie irrtümlich ist. Daß die Hyperbel einen geschlossenen Linienzug bildet, ist natirlich keine Neuigkeit. Seit Desargues wird diese Sache von den mneisten Geometern anerkannt. Nur die Art und Weise des Verlaufes der Hyperbel durch das "Unendliche" ist noch nicht richtig determiniert worden. Doch dieser Punkt muß in den Folgerungen seine Stelle erhalten. Trotzdem nicht neu ist, was in diesem Paragraphen über die Hyperbel gesagt wurde, so ist doch sehr neu die konsequente Schlußfolgerung, welche an die Hyperbel anknüpft. Wir machen hier zum erstenmal mit einer Sache ernst, die bisher gleichsam bloß als nebensächlicher Spaß existiert hat. Wenn man nicht im Denken nachlässig gewesen wäre, hätte man längst erkennen müssen, daß die Parallelenlehren von Euklid und Lobatschewsky-Bolyai, welche die Ebene endlos machen, durch die bloße Existenz der Hyperbel widerlegt sind. Wer die Ebene endlos sein läßt, behauptet 1- 2, indem er nämlich aus der einen Hyperbel zwei getrennte Figuren macht. Denn es folgt analytisch aus dem Begriff und Sinn der Endlosigkeit, daß sie nicht in sich zurücklaufen kann. Wer aber in der Geometrie 1 = 2 sein läßt, ist gedankenlos. ~ 18. Der Beweis des Grundgedankens durch den Satz von Pascal. Pascals Satz lehrt, daß bei jedem Sehnensechseck eines Kegelschnittes die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Sehnen auf einer Geraden liegen. Dieser Satz gilt, wie die Konstruktion nach1) Man wolle die Begriffe ~unendlich" oder o und "endlos" in der Darstellung dieses Buches scharf auseinanderhalten. Als O oder "unendlich" ist dem mathematischen Sprachgebrauch gemäß der geometrisch sinnvolle Begriff bezeichnet (~ 11 Def. XI.). Und von ihm wird nachgewiesen, daß er nicht die Eigenschaft hat, endlos zu sein.

Polargeometrie. 25 weist, auch dann, wenn ein Eckpunkt des Sehnense-hseJks im ~Unendlichen" liegt, was bei Parabel und Hyperbel eintreten kann. Wäre nun dieser Punkt im ~Unendlichen" kein wirklicher Punkt, sondern nur ein Erfindung der Menschen, so wäre er also, man muß dies betonen, objektiv überhaupt nicht vorhanden. Das Pascalsche Sechseck hätte also keine 6, sondern nur 5 Eckpunkte, und außerdem ein sonderbares Unding im Endlosen, das weder ein Punkt, noch sonst etwas ist. Es würde sich also nur um fünf Punkte handeln. Da dies nicht sein kann, we;l die Gleichung 5= 6 ebenso wenig gilt wie die Gleichung 0 1 oder 1= 2, so ist damit ausgemacht, daß der Punkt im,Unendlichen", der beim Pascalschen Satz in Betracht kommen kann, ein reeller Punkt ist. Das kann aber nur sein, weinn zwei Parallelen sich in reellen Punkten schneiden. Dies aber ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß die Ebene nicht endlos, sondern in sich selbst geschlossen ist. Folglich ist auch der Satz von Pascal ein klarer Beweis gegen die Parallelentheorien von Euklid und Lobatschewsky-Bolyai. Die Theorie von Klein-Clifford, welche keine Dualität der Schnittpunkte anerkennt, muß immer nach ~ 11 widerlegt werden. ~ 19. Der Beweis des Grundgedankens durch die trigonometrische Tangente. t~ t Es ist bekanntlich -- tang c1; tang a c; usw. Wird nun r r 90 = 90 Grad, so wird das Stick t, wenn die Parallelen pl und p2 sich schneiden, - p2 zwar sehr groß, aber der Tangens von 90 Grad bleibt jedenfalls eine bestimmte und klare Größe. Anders würde es sich ver- / /t2 halten, wenn Pl und p2 sich nicht scheitten. Dann wäre der Begriff tang 90 Grad ein \ ~ wahres Monstrum. Denn die betreffende Strecke t würde überhaupt nicht existieren, sondern wäre ein endloses Unding, welches aller Beschreibung spottet'). H) Hessenberg lehrt deemgmäß (Trigon. 8. 25), tg 900 sei nicht definierbar. Man Fig. 7.

26 Ernst Barthel, Es ist nun klar, daß die Geometrie soliden Begriffen vor phantastischen Uferlosigkeiten den Vorzug zu geben hat, wenn dies nur irgend möglich ist. In diesem Falle aber ist es sehr gut möglich. Nichts spricht dagegen, alles spricht dafür, daß p, und p2 als schneidend angenommen werden müssen, und zwar nicht bloß gelegentlich wie zum Spaß, sondern überall und in vollem Ernst. Die mitunter

vorkommende Annahme ~idealer oder uneigentlicher Schnittpunkte-, die keine geometrischen Schnittpunkte sein sollen, ist ein vielsagendes Zeichen für die Unzulänglichkeit des euklidischen Standpunktes. Dieser Standpunkt kann keinen Schnittpunkt zugeben. Der systematische Zusammenhang der Geometrie drängt aber mit Macht zur Annahme eines Schnittpunktes. Was tut man in diesem Dilemma? Mlan erfindet einen ~idealen oder uneigentlichen Schnittpunkt", der ehrlich gesagt überhaupt kein Schnittpunkt ist. Man möchte den Pelz waschen, ohne ihn naß zu machen. Da dies allerdings nicht geht, bleibt nur üibrig, den euklidischen Standpunkt aufzugeben und mit dent Riemannschen zu vertauschen. Dann hat man einen Schnittpunkt, der auch wirklich einer ist. Die trigonometrische Tangente in ihrem Verlauf ist ein Beweis für die einzige Berechtigung unseres Grundgedankens. Die Parallele p1 schneidet P2 in zwei Punkten, deren einer auf der positiven, deren anderer auf der negativen Seite der Tangenten liegt. Es ist also tang 90 Grad = + -, d. h. plus oder minus der Hälfte der Distanz o der Geradenschnittpunkte, wobei r 1 gesetzt ist. ~ 20. Auflösung eines trigonometrischen Paradoxons. Sei Kurve f eine Funktion, die in P ein Maximum erreicht. Die Wissenschaft lehrt nun bekanntlich, daß die Tangente t dieX-Achse unter einem Winkel null schneidet, welche Größe auch nimer der schreibe tg 90~ oo, um anzudeuten, daß tg a bei der Annäherung von e an 900 jeden beliebig großen Wert annehmen kann. Diese Angabe entspricht dem Standpunkt der euklidischen Geometrie. Aber wie unbefriedigend ist sie für jedes definite Denken! Zunächst wäre es sehr schade, wenn tg 900 nicht definierbar wäre. Die Mathematik hat dafür zu sorgen, daß tg 900 definierbar wird. Das ist gerade ihre Aufgabe. Ferner wollen wir hier gar nicht von niner Ann'herung von a an 900 sprechen, sondern von dem Grenzfall u = 900 selbst. Die angenäherten Werte sind atitürlich immer etwas kleiner als der (Grenzmert.

Polargeometrie. 27 Abstand d besitze. Die Differentialrechnung bekräftigt diese Lehre noch dadurch, daß sie das Maximum berechnet, indem sie den Differentialquotienten, also die trigonometrische Tangente des Tangentenschnittwinkels mit der X-Achse, gleich null setzt. Dadurch behauptet sie eben auch, daß der Schnittwinkel selbst die Größe null habe.. Nun behauptet die hier gebotene, Geometrie, daß die Tangente t die d f X-Achse nur dann unter dem Winkel < J'-~ e. null schneidet, wenn d gleich null ist, und daß der Winkel bei wachsendem d sogar bis zu 90 Grad wachsen kann. D)iese Behauptung ist dem Wortlaut nach der üblichen Lehre diametral Fi.

entgegengesetzt, und es hat den Anschein, als ob sie deren sichere Grundlagen negieren wirde. Indessen ist diese Befürchtung glücklicherweise unzutreffend. Unsere Geometrie würde sich sehr hüten, an Dingen zu rütteln, die sich als so brauchbar und einleuchtend erwiesen haben wie die obengenannten Festsetzungen der Wissenschaft. Unsere Geometrie zweifelt nicht daran, daß nman zur Berechnung eines Maximums auch in Zukunft den Differentialquotienten gleich null setzen soll. Und dennoch hält sie ihre eigentümlichen Behauptungen über den Tangentenschnittwinkel aufrecht..Das erscheint paradox und bedarf also der Erläuterung. Dreht man den verlängerten Abstand d um. P in Richtung des Pfeiles bis in die Lage der Tangenten t, so vermindert sich sein Schnittwinkel mnit der X-Achse bis zu dem unter Voraussetzung der Lage des Punktes P möglichen Minimum. Vorm Standpunkt dieser Winkelreihe betrachtet, ist der Schnittwinkel von t mit der X-Achse das absolute Minimum, das als Null zu bezeiclmhnen ist. Nun aber hindert uns nichts daran, diesen Nullwinkel am. Ort des Schnittes selbst in Augenschein zu nehmen. Da zeigt sich aber, daß auch er selbst, der Nullwinkel, einen Prozeß zwischen null Grad und 90 Grad durchlaufen kann, je nach der Lärge des Abstandes d. Diese Paradoxie, daß eine elementare Nullgröße von einem unendlich weit abgelegenen Standorte aus jeden beliebigen Größenwert haben kann, ist seit Leibniz in der Mathematik nichts Neues. Es ist einfach das große Grundgesetz der Differentialrechnung selbst. Wie die Differentialrechnung, ~o

 unterscheidet auch unsere Polargoometrie zwei Größengebiete, die einander in die Quere zu kolrmmien scheinen, es aber trotzdem nicht tun. weil sie ganz heterogenen Denkreihen angehören. Sie unterscheidet den Prozeß des Elementarwinkels von 90 bis 0 Grad, und den Prozeß des fernliegenden Parallelenschnittwinkels ebenfalls von 0 bis 90 Grad. Für die elementare Betrachtung bleibt aber der Parallelonschnittwinkel, welche reale Größe er auch immer haben mag, der Winkel des elementaren Minimums, also der elementaren Nullgröße. Die Polargeometrie verhalt sich demnach zur euklidischen Geometrie ähnlich wie die höhere Analysis zur Elementararithmetik. Es wäre verfehlt, ihre Konsequenzen zu fürchten. Die Doppelrolle des unendlich fernen Winkels dürfte sogar ein gutes Hilfsmittel abgeben, umn die Grundwahrheit der Differentialrechnung, daß eine elemientare.Nullgröße von einem anderen Standpunkte aus eine bestimmte Größe zwischen Null und Unendlich haben kann, in ei.ner besonders anschaulichen Weise deutlich zu machen. Da die hier berührte Frage besonders für die vermutlichen Gegner dieses Buches von Belang sein dürfte, sei sie mit dem Bemerken, daß diese Dinge im folgenden stillschweigend vorausgesetzt werden, nochjmals rekapituliert. Wir unterscheiden: 1. Das endliche Maßgebiet, 2. Das unendliche Maßgebiet. Im. endlichen Maßgebiet gilt das euklidische Axiom, das wir in lder Form aussprechen wollen: "Die Winkelsumnme im Dreieck beträgt 2 Rechte." Im unendlichen Mtaßgebiet gilt das Axiom von Riemann und Helmholtz, cdas hier in der Form mitgeteilt sei:,Die Wainkelsumme im Dreieck beträgt mehr als 2 Rechte." Beide Maßgebiete mit ihrem respektiven Axiom stören einander durchaus nicht. Eine besondere Überlegung ist nur nötig für den Fall, wo sie gleichsam in Personalunion vorkonunen, wenn nämlich eine einzige Dreiecksseite endlich ist, während die beiden anderen unendlich sind, also wenn z. B. in einem rechtwinkligen Dreieck ein zweiter ~Winkel auch gleich 90 Grad wird. Da entsteht zwischen endlichem und unendlichem Standpunkt folgendes Dilemma:

Polargeometrie. 29 Vom euklidischen Axiomn aus ist der dritte Winkel das Komplement von 90 Grad., also 0 Grad. Vomr Riemann-Helmholtzschen Axiom aus ist der dritte Winkel, wenn die endliche Seite größer als null ist, ebenfalls größer als null. Dieses Dilemma ist schaif ins Auge zu fassen. Es wird dadurch hervorgerufen, daß in diesem Dreieck der unendliche und der endliche Standpunkt einander widerstreiten, und es wird gelöst, indem man erkennt, daß jeder Standpunkt sein eigenes Axiom hat, das auf ihn allein beschränkt bleibt. Gegenüber der Hilbertschen Geometrie, die jedem der beiden Axiome eine eigene Geometrie entsprechen läßt und Euklid contra Riemann-Helmholtz setzt, behauptet die Polargeometrie die ergänzende Natur dieser beiden Axiome für die Standpunkte des Endlichen und Unendlichen, verbindet also Euklid cum- RiemannHelmholtz. Das euklidische Axiom gilt für den endlichen Standpunkt. Daher sind die Lehrsätze der eiklidischen Geometrie innerhalb gewisser iMaßlgrenzen voll berechtigt. (Vgl. ~ 90.) Das Riemann-Helmholtzsche Axiom dagegen gilt für den unendlichen Standpunkt. Daher muß die euklidische Geometrie, wenn sie ihren Ameisenhorizont überschreiten will, durch die in dieseml Buche gelehrte Geometrie, welche auf der Kugeloberfläche bzw. der Lambertschen Münze demonstriert wird, ergänzt werden. Die Totalität der Ebene und des Raumes wird nur durch letzteren Standpunkt erfaßt. Die Geometrie als objektive, vollständige und allumfassende Geometrie ist eine Verbindung beider sich ergänzenden Standpunkte, des endlichen und des unendlichen, des Mikro-Standpunktes und des Makro-Standpunktes. Es wäre verfehlt, die Lehrsätze der euklidischen Geometrie für den Mikro-Standpunkt durch andere Lehisätze zu ersetzen. Es wäre ebenso verfehlt, die Sätze der euklidischen Geometrie auf den Makro-Standpunkt zu übertragen. Die euklidische Geometrie ist Riemann-Helmholtzsche Geometrie (Kugelgeometrie) für unendlich kleine Kugelhauptkreislängen. Die Riemann-Helmholtzsche Geometrie ist euklidische Geometrie für unendlich große Streckenlängen. Beide Standpunkte stehen in einem gegenseitigen- Limes-Verhältnis zueinander.

Page 30

30 Ernst Barthel, Erwägt man diese sehr einfachen Dinge in anschaulicher Klarheit, so wird man auch vom Standpunkt der Hilbertschen Axiomatik die gegenwärtige Geometrie verstehen und anerkennen können. Denn so viel ist offenbar: der neue Gedankenkreis hat eine Reihe von Vorteilen, die jedermann in die Augen fallen. Zum Schluß sei erwähnt, daß der "endliche" und der ~unendliche" Maßbereich einander kontinuierlich ablösen, so daß eine scharfe Grenze zwischen beiden nicht existiert. ~ 21. Der Beweis des Grundgedankens durch die harmonische Teilung. P1A P2A Gleichung: pB P B. In Worten: Bewegt sich ein Punkt P1 von A über M nach B, so bewegt sich der vierte harmonische Punkt 1, P 1 Fig. 9. P2 von A in Richtung R1 und erscheint aus Richtung R2, von wo er nach B gelangt. Würden sich nun die Parallelen p und g überhaupt nicht schneiden, so wäre, wenn P1 in M ist, der Punkt P2 überhaupt nirgendwo. Denn er wird ja durch die Parallele p auf g konstruiert. Der Punkt wäre also verloren gegangen. Nun können aber in der geometrischen Welt Punkte ebenso wenig verloren gehen wie Atome in der chemischen Welt. Eine solche Auflösung eines existierenden Elementes in Nichts wäre ein Wunder, bei welchem uns der Verstand stillestehen müßte. Damit dieses Wunder nicht angenommen zu werden braucht, hat man also unzweifelhaft festzusetzen, daß die Parallelen p und g sich in bestimmten Punkten schneiden. Ist P1 im Punkte M, welcher, da er sowohl auf der rechten als der linken Hälfte der Strecke AB liegt, als Doppelpunkt aufgefaßt werden muß, so befindet sich P2 zugleich in den beiden Punkten, in welchen die Parallele p die Gerade g schneidet.)urch die harmonische Teilung wird auch schon bewiesen, was erst

Page 31

Polargeometrie. 31 in den Folgerungen genauer behandelt werden soll, daß die Ebene aus zwei Hälften besteht, deren jede eine logisch selbständige Einheit bildet. ~ 22. Der Beweis des Grundgedankens durch den Apollonischen Kreis..Der Apollonische Kreis zu dieser Strecke AB im Verhältnis a: b ist derjenige Kreis, der über den beiden harmonischen Teil pulnkten der Strecke im Verhältnis a: b geschlagen wird. Fig. 10. Er ist der geometrische Ort für alle Punkte, deren Abstandsverhältnis von A und B konstant, nämlich gleich a: b ist. Dieser Kreis geht bekanntlich für a: b = 1: 1 in die Mittelsenkrechte der Strecke AB über. Woraus folgt, daß diese Gerade ein Spezialfall der Apollonischen Kreisschar, also selbst ein Apollonischer Kreis, ist. Diese Sache ist so völlig einfach, daß man sich genieren würde, sie anzuführen, wenn sie nicht trotzdem ein klarer Beweis dafir wäre, daß es nicht angängig ist, die Gerade unabhängig vom Begriffe des Kreises zu behandeln. Der Grundgedanke ~ 1 ergibt sich so mit zwingender Notwendigkeit ganz von selbst. ~ 23. Der Beweis des Grundgedankens durch die Parabel. Wäre die Ebene endlos, so wäre die Parabel eine fragmentarische Kurve. Sie hätte weder Mittelpunkt noch zweiten Scheitel noch Durchmesser im eigentlichen Sinn. Nun läßt sich aber die Parabel als Grenz

32 Ernst Barthel, fall einer Ellipsenschar auffassen und sogar kinemnatographisch darstellen. Sie läßt sich aus einer sich verwandelnden Ellipse kontinuierlich erzeugen. Bei dieser Verwandlung können nun aber keine konstituierenden Punkte der Kurve in nichts verschwinden. Sondern es muß sowohl der Mittelpunkt als der zweite Scheitel, wenn auch in sehr großer Entfernung auf der Ebene, erhalten bleiben. Denn ihr Verschwinden wäre ein Wunder, welches dem Verschwinden eines chemischen Atomes gleichkäme. Da dies nicht sein kann, hat auch eine Parabel reellen Mittelpunkt und zweiten Scheitel sowie reelle Durchmesser. Das aber kann nur sein, wenn Parallelen sich in reellen Punkten schneiden und die Ebene also nicht endlos und unzurechnungsfähig ist. ~ 24. Beweis des Grundgedankens aus der symmetrischen Entsprechung von Ellipse und Hyperbel. Es wird allgemein zugegeben, daß Ellipse und Hyperbel als einander in logischem Sinn symmetrisch entsprechende Kegelschnitte x2 y2 aufzufassen sind, was durch die Gleichungen - + -3 1 und x2 y2 a - b- 1 genugsam erläutert wird. Nun läßt sich aber diese Entsprechung nur dann lückenlos durchführen, wenn die Ebene nicht endlos ist. Wäre die Ebene endlos, so würde die oben angegebene Hyperbel die Y-Achse überhaupt nicht schneiden, während die Ellipse bekanntlich auch mit der Y-Achse zwei Schnittpunkte

gemeinsam hat. Ist aber die Ebene in sich selbst geschlossen wie eine Kugeloberfläche, so hat auch die Hyperbel zwei Schnittpunkte mit d.r Y-Achse, nur liegen diese auf der ~unendlich" weit entfernten Hälfte der Ebene1). Sowohl Ellipse als Hyperbel haben unter dieser Voraussetzung vier Schnittpunkte mit dem Achsenkreuz, nämlich zwei mit der X-Achse und zwei mit der, Y-Achse. Bei der Hyperbel liegen die beiden letzteren Schnittpunkte nur auf der "unendlich" fernen Hälfte der Ebene. Obwohl diese Verhältnisse erst in den Folgerungen ausführlich zur Darstellung gelangen, dürfte doch schon durch diese kurzen Feststellungen deutlich geworden sein, daß auch die logische Symmetrie zwischen Ellipse und Hyperbel einen endlosen Verlauf der Ebene nicht gestattet, also ein Beweis für unsern Grundgedanken ist. 1) Vgl. die Ausführung über das Imaginäre ~ 62.

Polargeometrie. 33 ~ 25. Beweis des Grundgedankens aus der geforderten Lüickenlosigkeit der analytischen Gleichungen. Jedermann wird die Forderung zugeben, daß nicht nur die Gleichungen x + y r x r, xy r2, x2- y -r2, sondern auch die vierte Gleichung x2 + y2= -r2 eines geometrischen Sinnes fähig sein soll. Nun ist dies aber nicht der Fall, wenn die Ebene endlos ist. Unter der letzteren Voraussetzung ist die Gleichung x2 + y2 -- r'2 schlechterdings nicht geometrisch unterzubringen. Ist dagegen die Ebene wie eine Kugeloberfläche in sich selbst geschlossen, so bedeutet x2 + y2 = -r den Kreis umn der Punkt + -oc mit deni Radius r. Diese Festsetzung ist unter der genannten Voraussetzung nicht willkürlich gemacht, sondern mittelst der Hyperbel als notwendig erweisbar, was in den Folgerungen klar gezeigt werden wird. Hier konnut es nur auf die Konstatierung an, daß: 1. die Gleichung x2 + 2= -r2 auf Grund einer endlosen Ebene nicht untergebracht werden kann; 2. diese Gleichung auf Grund einer in sich selbst geschlossenen Ebenl einer klaren und notwendigen geometrischen Deutung fähig ist. Woraus hervorgeht, daß nur die letztere Voraussetzung mathematisch borechtigt ist. Gegen Einwände vergleiche man ~~ 61 und 62. ~ 26. Beweis des Grundgedankens aus der Symmnetrie überhaupt. Philosophische Erfahrung lehrt, daß alle Wirklichkeit und alles Denken symmetrisch oder polar oder dual geordnet ist. Für Mathematiker diene statt diescr Behauptung der Hinweis, daß der Gedanke der Dualität in der modernen Geometrie immer größere Fortschritte gemacht hat und wohl noch weiter machen wird. Es dürfte also nicht unpassend. erscheinen, wenn hier der Kürze wegen auf einen Beweis des philosophischen Prinzips verzichtet und der Leser gebeten wird. es fitr den Augenblick als berechtigt anerkennen zu wollen. Gibt man aber zu, daß ein streng duales oder polares oder synmmetrisches Geordnetsein zu den Anforderungen eines jeden Wissenschaftsinhaltes gehört, so ist dadurch ein neuer Beweis für die alleinige Richtigkeit unseres Grundgedankens ermöglicht. Denn unter Voraussetzung eines endlosen Raumes kann von einer polaren Struktur desselben gar nicht die Rede sein. Der Raunt wäre in diesem Falle 3

Page 34

Ernst Barthel, gestaltlos oder amorph, und also im geometrischen Sinne gesetzlos. Ist dagegen die Ebene in sich selbst geschlo"sen, so ist der Raum bis in alle Einzelheiten polar geordnet. Jedem Raumpunkt entspricht dann ein Gegenpunkt, der von ihm um die Strecke,unendlich" entferit ist. Der Raum ist dann nicht mehr amorph, sondern magnetisch oder kristallographisch gebaut. Es ist dies eine Möglichkeit, die interessant genug ist, um für unsern Grundgedanken jedenfalls Sympathie zu erwecken, Aus diesem Grunde nenne ich mein System der Geometrie P o largeometrie. ~ 27. Die B-Kegelschnitte. Obwohl diese Kegelschnitte keinen neuen Beweis für unseren Grundgedanken darstellen, ist es doch nützlich, sie hier zu erwähnen, weil sie den Beweis aus der Hyperbel (~ 15) und den Beweis aus der harmonischen Teilung (~ 18) verbunden zeigen. Papabe! m Jr Fig. 11. Der geometrische Ort für einen Punkt P, der sich so bewegt, daß er von einem festen Punkt F und einer festen Geraden 1 ein konstantes Abstandsverhältnis a: b besitzt, ist ein B-Kogelschnitt: Die Pole dieses Kegelschnittes teilen die Strecke FL harmonisch, wobei L der Fußpunkt des Lotes von F tauf 1 ist. Für a < b ist der B-Kegelschnitt eine Ellipse, für a = b eine Parabel und für a > b eine Hyperbel. Der Apollonische Kreis im selben Verhältnis a: b ist jedesmal Scheitelkreis an den entsprechenden B-Kegelschnitt. Man konstruiert beliebig viele Punkte der B-Kogelschnitte in folgender Weise:

Page 35

Polargeometrie. 35 Gegeben sei das Parallelenpaar 1 und X-Achse sowie die Abstandsstrecke LF. Diese heiße b. Auf der X-Achse nehme man einen Punkt H derart an, daß, wenn HF als a bezeichnet 'wird, das Verhältnis a: b dem Verhältnis des gesuchten B-Kegelschnittes entspricht. Die Gerade L H heiße g. ((Zeer H/yperbe2ast le9gt;/enzseÜs der Grezze dzeser 7Jgrw) J-'2, a f 3 2... undl die durch LF bestimmte Gerade, welche die Y-Achse ist, in den Punkten N1, N2, N3... schneiden. Man schlage jetzt um F mit den Radien M1N1, M\N2,.3N13s.... Kreise.

Diese treffen ihre trktion nöglichst vieler solcher Purnkte den Kegelschnitt konsein, immer nach derselben Miethode. Diese gemeinsame Punktkonstruktion der Kegelschnitte dürfte wegen ihrer lehrreichen Einfatcheit eines besonderen Interen sses wert sein;. Es läßt sich leieht einsehen, daß die Gerade g an den zugehörigen -Kegelslchniitt eine Tangente ist, der besondere Wichtigkeit zukommt. Sie werde daher die Haupttangente des betreffenden Kegelschnittes genannt. Ebenfalls leicht zu zeigen ist, daß die Hauptx y tangente die Gleichunlg --- o 1, der dazugehrige Kegelschnitt a ' b r y aber die Gleichung - + — 1 besitzt, wobei r = /2 + y2 ist. 3*

36 Ernst B arthel, r ist an dem Kegelschnitt stets die Vorbindungsstrecke eines beliebigen seiner Punkte mit F. Die obige Konstruktion beruht darauf, daß das jeweilige x der Haupttangenten zum entsprechenden Radiusvektor r des Kegelschnittes geiacht wurde. Der Reichtum der B-Kegelschnitte an schönen, einfachen Beziehungen wird ihren Wert nicht gering einschätzen lassen. Es bleibt nachzutragen, daß eine andere Gruppe von B-Kegelschnitten entsteht, wenn man die Rollen der X-Achse und Y-Achse vertauscht. Dann handelt es sich um die x v x r Haupttangente - + -- 1 und umn (ieKegelschnitte- + -L 1 a b a b wobei wieder r- t/2 X v2 ist. ~ 28. Widerlegung eines Einwandes durch die Erfalhriung. Vielleicht der wichtigste Punkt dieses Buches ist die)Definition VIII in ~ 11, durch welche die Gerade als Grenzfall eines Kreises hingestellt wird. Durch diese Definition wird der wesentliche Unterschied, den die Sprache und das naive Bewulßtsein zwischen "Gerade" und,Kreis" machen, als ganz unwesentlich behauptet, und es werden beide Linien zusammengefaßt als,,Kurven mit konstantem Kriiiiiungsmaß". Ist das konstante Krümmungsmaß von Null verschieden, so spricht man von Kreisen. Ist dagegen das konstante Krünmmungsmaß gleich Null, so spricht man von Geraden. Alle Kurven konstanten Krümmungsnaßes haben jedoch dieselben gegenseitigen Eigenschaften, inmlich diejenigen, die wir in der Erfahrung an Kreisen feststellen. Es ist verständlich, daß gerade an diesem Hauptpunkt auch die erste Kritik einsetzt. Man behauptet nämlich in einigen Teilen des 'Publikums, daß der Unterschied von Gerade und Kreis eben doch wesentlich sei, und daß es nicht möglich sei, aus einem Kreise lediglich durch Verminderung der Krümmung eine wirkliche Gerade zu erzeugen. Vermindert man, so sagen diese Kritiker, die Krinimulng eines Kreises immer mehr, so wird der Kreis zwar bis zu einem gewissen Werte flacher, kann aber den Grenzfall der absolut ungekrümmton Geraden grundsätzlich nicht

erreichen. Die Gerade ist delt Prozeß3 des sich vergrößernden Kreises transzendent. Bevor der Einwand logisch analysiert wird, sei hier gezeigt, daß er nicht der Erfahrung gemäß ist. Krümmt fnan einen elastischen Stock zu einem Kreisbogen und vermindert dessen Krümmung imnmer

Polargeometrie. 37 -mohr, so flacht er sich schließlich vollständig ab und wird zur geraden Linie, die man sogar in derselben Richtung wieder zum Gegenkreise fortbiegen kann. In der Erfahrung ist also die Gorade durchaus ein Spezialfall einer Kreisschar, und dem Kreisprozeß keineswegs transzendent. Was aber in der Erfahrung wirklich ist, muß auch in der Mathematik zutreffen, da ja die Geometrie nach ~ 10 die Wissenschaft von den räumlichen Ideen der Erfahrung ist. Die Widerlegung des gegebenen Einwandes durch die Erfahrung ist die grihidlichste, die denkbar ist. Wo die Erfahrung das Schiedsrichteramt iberninmt, haben alle entgegenstehenden Meinungen zu schweigen, und man könnte also damit den soeben gehörten Einwand sich selbst iberlassen. Doch da er eine gewisse Hartnäckigkeit;m Denken besitzt, soll er auch logisch widerlegt werden.! 29. Nachweis der unendlich nahen Annäherung des Kreises an die Gerade. Zunächst sei derjenige Standpunkt kritisiert, welcher überhaupt hugnet, daß ein sich vergrößernder Kreis auf ein beliebig flaches Maß gebracht werden kann, daß er also der Geraden bis zu beliebiger Vollständigkeit angenähert werden kann. Sei k ein Kreis mit (dem MIittelpunlkt M und t seine Tangente im Punkte B. si und s2 seien Sekanten durch den Kreis, welche mit dem Bierihrungsradlius B M parallel verlaufen und zu ihm symmetrisch sind. Sie schneiden don Kreis auf der der Tangente zugekehrten Seite inl dent Punktel 1 und 1'. Sie schneiden die Tangente selbst in den Punkten Z' und. ' Es ist nun klar, (laß mani zwischen den Kreis k und die Gerade t beliebig viele Kreise eil- B,, t sihalten kann, welche noch: j8 fla.cher sin(d als der gegobene Kreis k. Von keinem 1 /' NKreise k kann also jemals behauptet werden, dabß or der flachstmögliche sei. Son- ' (lern das Maxinum der Abflachung ist erst bei der R Geraden t selbst erreicht. Folglich nähert sich ein Kreis bei seiner Abflachung unendlich nahe an eine Gerade an.

38 Ern st B a rthel. ~ 30. Nachweis der Identität dieses Annäherungsproblems mit den eleatischen Pfeilproblem. Ob

nun unter Voraussetzung dieser Einsicht der sich abflachend,Kreis die Gerade selbst zu erreichen imstande ist, oder ob er nur auf eine unendlich kleine Differenz sich ihr annähert, bleibt lnach wie vor ein Problem. Zwar ist dieses schon in ~ 28 gelöst wordeln, doch soll hiervon jetzt abgesehen werden.)Dann ist leicht zu zeigen, ear daß dieses Problem kein Yenäs2^%- - anderes ist als dasjenige der /~~;a~ ~ Eleaten, das sie zu dem Sophisma vom fliegenden Pfeil u mformten Es lautet: Fliegt ein Pfeil von einem Punkte 1 aus nach;' einer festen Wand, die wir mit Fig. 14. dem senkrechten Treffpunkt o bezeichnen wollen, so kann er diese Wand gar nicht erreichen. Denn er muß zuerst eine Hälfte, dann ein Viertel, dann ein Achtel, dann ein Seclzehntel usw. der ganzen Strecke zuriicklegen. Da nun diese geometrische Reihe offenbar endlos ist, so ist es nach diesem Sophisnm unmöglich, daß der Pfeil jemals den Punkt. c auf der festen Wand erreicht. Es kann nun nicht bezweifelt werden, daß dieses alte Pfeilproblem mit dem. Annäherungsproblem ~ 29 identisch ist. Je zwei gleichgelegene Teilpunkte der Strecken 1 x undd 1' oc' determinieren nämlich zusammen mit B einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden BMI jenseits von 3t liegt. Sowohl beimt Pfeilproblem als beim Kreisproblem handelt es sich also um die fortlaufende Teiltng einer Strecke 1 c nach Maßgabe der geometrischen Reihe: 1/2 + 1/4 +,/s + 1/6 usw. Und es fragt sich in beiden Fällen, ob diese Reihe vermögend ist, den Endpunkt der Strecke schließlich zu erreichen odte nicht. Die Erfahrung zeigt, daß das Ziel erreicht werden kann. Der reine Verstand behauptet notwendig das Gegenteil. Obwohl es ganz klar ist, daß in solchen Fällen die Erfahrung recht und der reine Verstand unrecht hat, ist es von philosophischem Interesse, sich dariiter Licht zu verschaffen, wodurch eigentlich die Diskrepanz zwischen arithinetischem Verstand und geometrischer Erfahrung verursacht wir(t.

Page 39

Polargeometrie. 389 ~ 31. Erklärung des erkenntnistheoretischen Zwiespaltes durch (las Bergsonsche Prinzip. Während. die unnrittelbare Erfahrung kontilnierlich verläuft, setzt der Verstand innerhalb des Kontinuums bestimmte Einschnitte fest, welche er zählt. Die Arithmetik und ihre höheren Fortbildungen Jind demnach die eigentlichen Wissenschaften des reinen Verstandes, während der Geometrie ein sehr wesentliches empirisches Element innewohnt, das durch algebraisches Denken niemals erfaßt zu werden vermag. Für den reinen Verstand ist jedes geonmetrische Kontinuunl ein endloser Ozean von IMöglichkeiten, innerhalb dessen sich endlos viele Einschnitte nach Belieben annehmen lassen.)er reine Verstand ist recht eigentlich das Vermögen der Haarspalterei, welches mehr dazu geeignet ist, die Natur u.nverständlich zu machen, als sie zu erkennen. Zur Naturerkenntnis führt nur die unnmittelbare Einsichtnahme, welche man altmodischerweise mit demn Worte,,Erfahrung" bezeichnet. Für die Geometrie ergibt sich daraus die Lehre, daß ihre untersten Fundamente nicht auf deml reinen Verstand, sondern auf der reinen Erfahrung gegrindet sein missen, wenn sie haltbar -und frei von inwillkürlicher Sophistik sein sollen.)iese empirische 5lMethode der geomnetrischen Grundlegung wird in demn: vorliegenden Buche befolgt. ~ 32. Die Bewegung des Mittelpunktes im Aniäherungspro ze ß. Der Verfasser glaubt sich nunmehr auf den Standpunkt stellen zu sollen, daß die Tatsache des kontinuierlichen Übergangs zwischen Kreis und Gerade allgemein anerkannt wird, und er bittet de(n Loser, seine Aufmerksamkeit jetzt demn Mittelpunkt 5M des Kreises zuzluweten (Fig. 13).!)ieser Mittelpunkt bewegt sich, wenn (der Kreis unter Festhaltung des Punktes B und der Tangenten t abgeflacht wird, in der Richtung R geradlinig vorwärts. Er wird sich, w-enn die PeriFlherie gleichmäßig in arithmetischer Irogression an die Gerade herangeführt wird, mit stark beschleunigter Geschwindigkeit bewegen. Je näher die Peripherie der Geraden kommnt, desto rasender wird seine Geschwindigkeit. Bei alledem ist aber die Hauptsache, daß der Punkt sich in jedem Momnent des Prozosses an einor bestimmten Stllie der Ebene

 befindet. Man kann sich denken, daß ein Auge den Punkt bei oeiner Bewegung aufmerksaml verfolgt. Dieses Auge wird sich zwar schließlich sehr schnell und sehr weit bewegen müssen, aber es wird niemals das Wunder erleben, daß der Punkt vor seinem Blick in Rauch aufgeht und zu Nichts wird. Der reelle Mittelpunkt bleibt reeller Mittelpunkt seiner Kurve, wie sehr auch die letztere sich abflachen m.öge. Daraus folgt mit vollkommener Schärfe, daßl auch die Gerade auf der Ebene einen Mittelpunkt hat, oder violmehr zwei Mittelpunkte, da nach Fig. 1 jede Gerade der Grenzwert zweier entgegengesetzt verlaufenden Kreisscharen ist. Jede Gerade einer Ebene hat also auf jeder von beiden Seiten cinen Mittelpunkt. Diese Punkte sind, nach ~ 12 und nach den Satz, daß dlie Tangente auf dem Radius senkrecht steht, die beiden Schnittpunkte der auf der Geraden errichteten Lote. Sie haben nach ~ 19 cc einen Abstand von je,, von der Geraden. Einen stereometrischen Satz iber lie Mittelpunkte von Geraden werden die Folgerungen ableiten. (~ 75.) ~ 33. Eine auffällige Wreg-Zeitgleichung. Es sei gegeben der rechte Winkel ASR und die Parallele AI zu S R. Man denke sich den rechten Winkel in zwei Hälften zerteilt, dessen linke Hälfte wiedor in zwei Hälften, deren linker Winkel se(i wieder in zwei Hälften geteilt, und so fort bis zu unendlicher Annäherung und schließlich Erreichung des freien Schenkels SR. Man denke sich nun diese fortgesetzte Hälftung in gleichen Zeitabständen (lurchgefihrt, zum Beispiel von Sekunde zu Sekunde. Dann besteht zwischen dem Weg auf der Vertikalen AU und der Zeit folgende Gleichung: st = a. tg 90~. 2n.)arln bedeutet st den Weg s auf AU von A gefechnet nach der Zeit t. a ist der Atstand AS, d. h. der Weg in der Zeiteinheit 1. Was diese Gleichung aussagt, kann man sich sehr anschaulich klarmachen, indemnl mlan die Winkelteilung in gleichen Zeitabständen kinnmatographisch vorstellt, während gleichzeitig von A aus ein

Polargeometrie. 41 IKrper herunterfällt, der sich in jedem Zoitpunkt an dem durch die Gleichung bestimn ten Ort befindet. c' a A Wenn dcer bewegliche Schenkel des Winkels die Grenze S R er- \ reicht hat, befindet sich der fallende Körper in der Entfernung wie \ groß auch l die Einheitsstrecke a gewählt war. J)iese Gleichung hat eine besondere p1hysikalische Bedeuttung, nämlich in der Lehr der em.pirischen Fallgosetze. Der R \ \ C' -Fig. 1. ~ Trenzplnkt 2 entspricht dem Erd- rllittelptukt. Induktiv-empirische Versuche sollenl an ader' Ort iosprolchon werden. ~ 34. RBeeitigung eines durch die Vorstelllutgstendonz voranlaßten Iindernisses. Es pflegt Schwierigkeiten zu machen, die Insichgeschlossenheit tler Garadlon anzuerkennen, da man sich diese Eigenschaft einer Linie vermöge einer Krümmung vorzustellen gewohnt ist. Eine gekrümmte Linie ist aber keine Gerade. Da sich nun die Insichgeschlossenlheit einer Geraden an ihr selbst nicht vorstollen läßt, ist dies für manche Beurteilor ein Grund, der Geraden (lie Eigenschaft der Insichgeschlossonlleit iibrhaupt abzusprechen. Abgesehen davon, daß es nicht angeht, auf Grund e;nes subjektiven Geftihls objektiv bewiesene Eigenschaften einer Linie abzuleugnen, läßt sich die Insichgeschlossenheit der Geraden mit einem berechtigten Vorstellungsbestrober tatsächlich auch versöhnenl, und zwar durch folgende Überlegungen: 1. Der Übergang zwischen Kreis unc Gerade kortint in der Erfahrung vor, ist also vorstellbar. 2. Die Insichgeschlossenheit eines Kreises, also des nachgewiesenen Ebenbildes der Geraden, ist ebenfalls vorstellbar. 3. Unter diesen Umständen wird man sich der Einsicht nicht vorschließen, daß doie Unvorstellbarkeit der Insichgeschlossenheit

Page 42

42 Ern st B ar t h el, der Geraden selbst auf der Eigenart unseres optischen Ver.mögens beruht, die Dinge immer nur bis zu einem gewissen Horizonte verfolgen zil kinnen. 4. I)ie Gerade besteht übrigens, wie in ~ 21 erwähnt ist, auts zwei logisch gegeneinander selbständigen Hälften, deren jede bequelm ats Gerade vorgestellt werden kann. 5. Auch die Oberfläche einer undurchsichtigen Kugel kann nicht simultan überblickt werden. 6. In den Folgerungen wird durch die,,Lanbertsche Mlitnze" ein Hilfsmittel geschaffen werden, welches gestattet, die ganze Unendlichkeit der Ebene, also auch der Geraden, in höchst anschaulicher Weise ohne Krüiimmung vollständig mathematisch abzubilden. Aus diesen Erwägungen dürfte hervorgehen, daß die Vorstellungstendenz unseres Bewußtseins, die als ein Element der Klarheit stets in möglichster Weise respektiert werden soll, gegen (lie bewiesonle Eigenschaften der Geraden kein unüberwindliches Hindernis abgeben kann. ~ 35. Beseitigung eines analytischen Einwandes. Wenn zwei Geraden sich in zwei Punkten. auf der Ebene schleitden, sollte man glauben, daß dadurch der völlig sichere UnTltrschied von Kurven ersten und zweiten Grades zerstöit werde.)as waäre sehr schlimm. Geraden haben Gleichungen ersten Grades un(d miissenl sich in der Anzahl ihrer gegenseitigen Schnittpunkte von allen andern Kegelschnitten, welche Gleichungen zweiten Grades besitzen, unterscheiden. l)ie Lösung dieses gefährlich aussehendon Zwiespaltes zwischen Geometrie und Analytik hat schon Gud.erm ann im Jahie 1830 vorbereitet, und wir brauchen nur der Spur zu folgen, die er am Ende des,,Vorberichtes" seiner,,Analytischen Sphärik" niedergelegt hat. lieser Mathematiker ist bestrebt, die Geometrie auf der Kugel an die Geometrie auf der Ebene, so weit er es füir möglich hält, anzugleichen. FUm diesem Zwecke zu dienen, setzt er fest, daß je zwei Hauptkreise einer Kugel, die er nm Gegensatz zu den sphärischen iNebenkreisen als,Sphärische Geraden" bezeichnet, nur einen eiv

Page 43

Polargeomletrie. 4: zigen Schnittpunkt haben sollen. Er teilt also (lie Kugeloberfläche in zwei gegeneinander selbständige Hälften und bezieht die Gleichiunge nur auf eine Kugelhälfte. Unsere Iberlegung in den vorhergehenden Paragraphen hat schon von selbst darauf gefiihrt, daß auch die Ebene als aus zwei selbstäldigen Hälften bestehend aufgefaßt werden muß. Tut man aber dies, so ist der Unterschied. zwischen Kurven ersten undl zweiten Grades auf das beste stabilisiert. Die analytischen Gleichungen gelten stets n'ut fiiür eine Eenenehälfte. Auf dieser aber haben in der Tat zwei Geraden nur einen einzigen Schnittpunkt, wäahrend zwei Kreise deren zwei besitzen. Durch die logische Zweiteilunig i der Ebene, welche eines; der wesentlichsten Merkmale der Polargeometrie ist, wird die schei - bare analytische Schwierigkeit restlos beseitigt. ~ 36. Beseitigulng eines Einwandes (er projektivon G(eometrie. W\en die Ebee wie eine Klugeloberflächel in sich selbst geschlossen ist, so lmtuß auch die projektive 'Geometrie zunächst de.t Einwand erheben, daß (die durch sie längst bewährte Anzahl der Schnittipunkte zwischen (eraden niicht plötzlich vermehrt werden kann. Eine geometrische Reform, durch welche die begrniidetsten Wahrheitent ins lWanken kommlne sollten, wäre lna.tilrlich ein sehr bedenklicher Vorschlag. D)och die Polargeometrie hat weder (lie Absicht noch (das Vermöiigen, relliche Sachverhalte zu stören. Sondern sie geht lediglich (tarauf aus, die soliden Inhalte der Geometrie von Uiulestinm theit und. Vieldetltigkeit zu befreien. Was aber die projektive Geoimetrie betrifft, so ist sie derjenige Teil der Gleonetrie, de(r (den objektiven Zusallm enhängen a.m meisten gerecht wird. Daher ist von vornherein zu vermuten, daß die Polargeomletrie sich mnr zumi S('chei v-on ihr unterscheidet. 1)er Schein aber wird durch die einfache Tatsache ver-usacht. tdaß auch die projektiven Schlnittpunkte nur auif einer Hälfte der Ebene gezählt werden, während die Polargeometrie beide Hälften der Ebene inl Betracht zieht. Auch in dieseira Falle wird also der Einwmand (1urch die Erilkenntnis von der Zweiteilhg der Eb)ene beseitigt.

44 Ei' n s t B a rth el, ~'37. JDas Gesetz von der Erhaltung der geometrischen Elemente. An verschiedenen Stollen, besonderxs im don ~~ 13, 1.8, 19, 21, 23, mutten wir auf die Notwendigkeit hinweisen, daß ein geometrischer Punkt durch bloße Fortbewegung seiner selbst auf der Ebene nicht plötzlich zu Nichts werden kann, sondern sich in jelen de Moment seiner Bewegung als bestimmter Punkt an einem bestimmten Orte der Ebene befindet. D-ieses PostuLt,, Idaß mathematisehe Elemente (ltrch bloße B3etwegung ihrer selbst nicht zorstört werden können, ist so grundlegend wie allgemeiinverbindlich. Es spielt in der Geometrie genau die gleiche olle wie dals,,Gesetz von der Erhaltung der iaterie" in der Chemie und das,Gesetz von der Erhaltung der Energie"' in der Physik. Diese,drei Gsetze haben gleicherweise zum Inhalt, daß durch bloße Umformunr g oder Bewegung kein Elelentt der Wirklichkeit in seiner Existenz beeinträichtigt wird, sondern (daß jedes Element die Existenz, die es einmal besitzt, unter jeder Form lund unter jedem i

3ewegmngszustand beibehä.lt. In allgemeiner Fassung lauten dfiese drei Gesetzo:,Kein Element, dessen Existenz vom Bewußtsein vorausgesetzt wird, kann durch iseinle Schlicksale innerhalb d er Existenz seine Existet z vorlie ren*1) Indem wir das.,Gcsetz von der Erhaltung der getonmtrischen Elemente" als ge.ometriscthes Grundgesetz (Ion soeben erwtlhtel chemishenI und physikalischen Grundgesotzeu an die Seite stellen, glauben wivi der Polargeometrie. eine ganz besondere Empfehlung mitzugeben. D)ein die Polargeometrie unterscheidet sich z. B. von der ectklidischen CGeometrie gerade dadurch, daß sie das Gesetz stets berücksichtigt nd niemals fahrlässig außer Acht läßt. In ler enklidischen Geomietrie geschehen Wunder -- nämlich plötzliche Zerstörungen von sich bewegenden Punkten. In der Polargeometrie silnd solche WVunder autsgesi lossen, wodurchl sich eben diese Geomeotri(e atls die kritische e rweist. 1) Dieses Gesetz unterscheidet die Wirklichkeit vom Traumi. Im Traum zerrinnen einem die Dinge in den Handen. Die euklidische Geometrie nthält noch einen Traumbestandteil: das ist die neue Erkenntnis dieses Buches.

Page 45

Polargeometrie. 45 ~ 38. Die Insichgeschlossenheit von Gerade, Ebenii und Rauam. Da der Beweis geliefert ist, daß Geraden wie Kugelhaiutkrois in sich selbst zurücklaufen, so ist die Eigenschaft der Insichgeschlossonheit auch für Ebene und Raum ausgemacht. Denn Ebene und Raum werden in jeder Richtung von Geraden durchmessen, und die Eigenschaft der Geraden entscheidet also auch iber die Eigenschaft.de Ebene und des Raumes. Man hat somit das Resultat festzuhalten, daß Gerade, Ebene und Raum nicht endlos sind, sondern in sich solbt zuriicklaufen. Zwei sich in Blickfeld unserer Betrachtung schneidende Geraden einer Ebene, divergieren nicht bis ins Endlose von einander, sondmrn sie beginnen an einer gewissen Kulminationsstelle wieder gegeneioander zu konvergieren. Man kann daher die Theorie der Polargoo.metrie iin Gegensatz zur Endlosigkeitstheorie auch als Kulminati n.stheorie bezeichnen. ~ 39. Die mathellmatische Fruchtbarkeit der Polargeomietr ie..Der Wert einer miatheinatischenl Neuerung bemißt sich nicht zuletzt. auch nach der Auswertbarkeit ihrer Thesen inmt einzelnen. I dieser Hlinsicht befindet sich die Polargeometrie in günstiger Lage. Es ist wirklich iberraschend, welche Fiille von neueon, einleuchtenden Beziehungen, von denein m1an autf euklidischeni. Standpunklll t nichts a.hnen konnte, durch sie geschaffen werden. Da der zweite Teil des 3Buches diesen mathematischen Folgerungen gew idmet ist, braucht hiecr nicht näher dariber gesprochen zu werden. Es sei jedoch betont. daß die große Plastik der Lehrsätze auch für die Region d.es Unenodlichen sowie die allgemeine Durchführung des Dualitätsgedankens dieser Geometrie eine Schönheit verleihen, die man anderwärts vergebens sucht. Während in der euklidischen Geometrie das Unendliche eine problematische Nebelsphäre ist, iber welche man nur unsichere und widersprechende Gerüchte verninmt, hat die Polargeometrie erkannt, daß das Unendliche eine ebenso wirkliche undl ebenso genau erkundbare Sphäre ist wie das Endliche. da- das Endliche und das Unendliche sich nicht durch objektive Eigenschaften, sondern nur durch den zufälligen Standpunkt des Beobachters unterscheiden.

46 1 Ernst Bart el ~ '40.)Di raiumtheoretisch-astronomische Fruchtbarkeit der Polargeometrie. Auch in raulmtheoretisch-astronomischer Hinsicht sind die Folgerungen der Polargeometrie sehr reizvoll. Durch sie wird z. B. als Wirklichkeit erwiesen, was der Astronom Prof. Dr. K. Schwarzschild a;ls wahrscheinlich hinstellte: daß nämlich der Raum nicht endlos ist, sondern in sich selbst zurüickläuft. Hier sei zum Abschluß eine Stelle atus Schwarzschilds Buch„Über das System der Fixsterne" {Leipzig 1909) wiedergegeben:„Es gab eine Zeit, wo es wunderbar erschien, daß man beim Geradeaisgehen auf der Erde wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt. Es kinnte sein, daß zukünftige GCeschlechter dasselbe Wunder in einem noch höheren Maße erlebten, wenn es sich herausstellte, daß, \weRnn manl von der Erde weg weiter und weiter in den Rlttm hinausgeht, man schließlich wieder zu demselben Ausgangspunkt zurückkommt. Was sich durch die Erdumsegelung Magelhäens in zwei Dime nsionen ereignete, das würde sich hier in drei Dimensionen wiederholen. So wie die Erde eiLn endliche Oberfläche hat, von der jetzt nu:r lnolh geringe Fleokeckhen unbesucht sind, so wiirde der Rium einen ~endlichen Inhalt haben, den wir ebenfalls ausforschen könnten.' Die P)olargeometrie hat diese Folgerung. 11. Mathematische Folgerungen. A. Planimetrischer Teil. ~ 41. Der definite Unendlichkeitsbegriff der objektiven Geometrie. Schon J. H. Lambert hat in seiner "'Theorie der Parallellinien" 1786 betont, daß die Geometrie, die von uns als objektive vertreten wird, sich von allen anderen logisch möglichen Geometrien besonders auch in Hinsicht auf den Unendlichkeitsbegriff wesentlich unterscheidet. Während für die Standpunkte, welche nichtschneidende Geraden einer Ebene anerkennen, der Begriff unendlich im geometrischen Sinne (vgl. ~ 11 Def. XI) so viel wie endlos bedeutet - welche Bedeutung man nur noch einer besseren mathematischen

Formulierung unterwerfen kann -, ist für die objektive Geometrie die Länge

Polargeometrie. 47..uendlich"i eine definite Strecke. Die Länge o ist fitr den letzteren Standpunkt eine Naturkonstante, die ein objektiv feststehendes Längenmaximumn bezeichnet. Aach Lambert hat diese Möglichkeit als sehr verlockend beurteilt, und man wird in der Tat nicht umhin können, ihr in der Polargeometrie mit besonderer Befriedigung zu begegnen. ~ 42. J)er indefinite Unendlichkeitsbegriff der euklidischen Geometrie. Die Geometrie kann auf allen Gebieten als eine Wissenschaft von Bestiminmteml charakterisiert werden. Eli unbestimmter Inhalt widerspricht geradezu dem exakten Wesen der Geometrie. Weenn zwei Geometrien möglich sind, von denen die eine einen indefiniten Begriff enthält, und die andere nicht, so wird man selbst in dem Falle, daß sie beide sonst gleich empfehlenswert sind, der letzteren als der rationaleren bestimmt den Vorzug zu geben haben. Die euklidische Geometrie hat aber den Nachteil, der soeben erwähnt wurde: sie enthält einen indefiniten Begriff, nämlich ihren Unendlichkeitsbegriff. Daß die indefinite Unendlichkeit, die man auf eiklidischem Standpunkt anzunehmen genötigt ist, in ihrer indefiniten Naturhaftigkeit in der Mathematik eigentlich recht unerwünscht ist, zeigt sich schon in dem Bestreben, durch eine passende Definition wenigstens eine definite Form dieses Begriffes zu ermöglicher-. Die gebräuchliche ')efinition des Unendlichen im indefiniten Sinne macht nämlich das Unendliche zu einem Wert, der immer noch größer ist als jeder noch so hohe angebbare, d. h. definite Wert. Durch diese)efinition ist offenbar der Versuch gemacht, die gänzlich indefinite Natur des Begriffes Unendlich einigermaßen in definite Form zu kleiden. Man gibt die Anleitung, möglichst große definite Werte anzunehmen und die Größe Unendlich dann immer noch gröler zu setzen. Wie anerkennenswert auch dieses Bestreben ist, dem leider indefiniten Begriff wenigstens den Schein von etwas Definitem zu geben, so kann es doch die dem Begriffe von Natur aus anhaftenden Mängel nicht tilgen. Auch im Kleide dieser Definition zeigt der Begriff seine eigentlich vernunftwidrige Natur. Das Bewußtsein, das nach immer höheren Werten greifen soll, ohne das Ziel seines Strebens erreichen,

458 Ernst Barthel, ja ohne sich ihmn auch nur annähern zu

können, wird von dieseii mathematischen Begriff, wenn der Autsdruck gestattet sein soll, gleichsam zum Narren gehalten. Nun kann es keinem Zweifel unterliegen, daß es eine Sanierung der Geometrie bedeutet, wenn sie auf irgend eine einwandfreie Weise von derart beleidigenden Begriffen befreit rird. Diese Sanierung Ogeschieht durch die Polargeometrie. ~ 43. ü)iihrings Analyse des Unendlichkeitsbegriffes. Eugen Diihring, der sich obenfalls auf den Bode.n des eukiidischen Unendlichkeitsbogriffes stellt, hat versucht, denselben innerhalb dieses Standpunktes zu sanieren. Er setzt fest, daß man streng zu unterscheiden habe zwischen dem indefinit Enmdlosen, welchel s er mit dem Zeichen 1i benennt, und den sehr großen approximativen. definiten Werten, für welche allein er das Zeichen c reserviert sehen möchte. Diesem Standpunkt gegenüber seien folgende Belmrklugen gestattet: 1. In Grunde genommen luterscheidet sich diese Ansicht voai der im ~ 42 mitgeteilten gebräuchlichen Auffassung nur dadurch. dtaß sie die indefinite Endlosigkeit als mathematisch nicht in Betracht kommnend darstellt und den definiten Approximationswerten, di(; sie als o b)ezeichnen zu sollen glaubt, alle mathonmatische Bedeltung zuweist. Aus diesem Verfahren spricht zweifellos der Wunsch, die indefinite Endlosigkeit aus der Mathematik zu entfernen. Daß dies jedocth auf solche Weise nicht möglich sein dirfte, zeige das Folgende. 2. Die Größe Unendlich im geometrischen Sinne ist durch Idas Verhalten von Parallelen d-efinielrt. +Es itderspricht den gecmetristc lhel Anforderungen, sie anders zu definieren, als dies in ~ 11 Def. XI geschehen ist. Was man auch über die Länge Unendlich denkeln mag, sicher ist soviel, daß sie eine von Menschen unabhängige objektive Bedeutung hat. Ninmmt man nun zwar keine Parallelenschnittpunkte an, definiert aber das mathematisch Unendliche trotzdem als etwas)Definites, nämlich als irgend einen (lefiniter Approximlationswert an das Unerreichbare, so macht man (las Unendliche zu etwal, das es in der Mathematik nicht ist. 3. Beim Unendlichgroßen ist eine Approximation an das Endlose übrigens eine Contradictio in adjecto. Beim Unendlichkleiohen allein findet eine scheinbare Approximation an den Grenzwert statt.

Polargeometrie. 49 Die Tatsache, daß Dühring sein Hauptaugenmerk ursprünglich auf das letztere richtete, mag seine Definition des Unendlichen als Approximation erklären. Zusammenfassend wäre zu sagen, daß in der Dühringschen Auffassung zwar der Wille zum Definiten sympathisch berührt, daß aber sein Vorschlag, die Größe so als definite Approximationsgröße aufzufassen, hinter dem allgemein gebräuchlichen Modus, die als indefinit betrachtete Größe co notgedrungen durch definite Unterschiebungen zu ersetzen, an Wert zurücksteht, weil jene Auffassung des geometrisch Unendlichen dasselbe zu einer unobjektiven, willkürlichen Nummer machen würde. Der definite Unendlichkeitsbegriff, 'den Dühring für wünschenswert zu halten scheint, kann auf keine andere Weise erlangt werden als durch die Anerkenntnis reeller Parallelenschnittpunkte - also durch die Annahme einer gewissen nichtouklidischen Geometrie. Übrigens läßt sich über "die nichteuklidischen Geometrien" nicht in Bausch und Bogen urteilen. Denn die eine Hälfte, nämlich diejenige von Lobatschewsky und Bolyai, ist falsch, während die andere Hälfte, nämlich diejenige von Riemann und Helmholtz, einzig richtig ist. ~ 44. Dührings Gesetz der bestimmten. Anzahl. Dühring betont in der,Wirklichkeitsphilosophie" die logische Notwendigkeit, daß alles Zählbare eine bestimmte Anzahl haben muß. Der Begriff einer Anzahl bedeutet eo ipso stets eine bestimmte Anzahl. Aus diesein kühnen, aber unzweifelhaften Gesetz schließt Dühring, wie scheint mit Recht, auf die endliche Anzahl der Himmelskörper. Es lassen sich aber aus dem Gesetz noch andere Schlüsse ziehen, z. B. der folgende: r 2 J 4 Fig. 16. Sei g eine Gerade und A auf derselben ein Ausgangspunkt für einen Fußgänger, der in bestimmt zählbaren Schritten 1, 2, 3,... in Richtung R1 vorwärtsschreitet. Es fragt sich nun, wieviel Schritte nötig sind, um, was die Mathematik als möglich annehmen muß, 4

50 Ernst Barthel, aus Richtung R2 wieder an den Ausgangspunkt A zurückzugelangen. Zwei Fälle sind dabei: denkbar. 1. Der Fußgänger hat endlos viele Schritte nötig. 2. Der Fußgänger hat eine definite Anzahl von Schritten nötig. Bestände der erste Fall zu Recht, so wäre, ganz abgesehen von den bereits behandelten geo metrischen Unzuträglichkeiten, auch das Gesetz der bestimmten Anzahl durchbrochen. Denn es gäbe in der Welt des Denkens eine Reihe von bestimmt zählbaren Einheiten ohne definite Anzahl. Besteht aber der zweite Fall zu Recht, was in der Polargeometrie unbezweifelbar ist, so wird auch dem Gesetz der bestimmten Anzahl genügt. ~ 45. Der algebraische Unendlichkeitsbegriff. Eine Hauptursache dafür, daß der indefinite Unendlichkeitsbegriff sich in der Geometrie trotz seiner Bedenklichkeit fraglos zur Anerkennung gebracht hat, ist die Tatsache, daß der algebraischo Unendlichkeitsbegriff wirklich indefinit ist, und zwar in.notwendiger Weise. Da heute die Algebra in ihrem vorschreibenden Werte für die Geometrie häufig sehr hoch eingeschätzt, man könnte vielleicht sogar sagen überschätzt

wird, ist es sehr begreiflich, wenn man dem indefiniten Begriff des reinen Verstandes auch in der Geometrie Heimatrecht gewährte, zumal ja die euklidische Geometrie damit vollkomnnmen übereinstimmt. Daß der algebraische Unendlichkeitsbegriff notwendig indefinit ist, läßt sich leicht eingehen. Hat man z. B. die Reihen /2 + 1/4 /- 8s -+- /16... oder 2 + 4 + 8 + 16..., so gibt es für diese innerhalb des Verstandes unter keiner Bedingung ein Aufhören.' Nur der objektive Tod aller denkenden Wesen könnte solche Reihen, wenn man sie wirklich zu Ende denken wollte, in gewaltsamer Weise abschließen. An sich selbst sind die Reihen endlos. Oder man denke an die Irrationalzahlen, z. B. an Wurzeln wie]/2, und man hat ähnliche endlose Reihen, deren indefinite Natur auf keine Weise beseitigt werden kann. Daß der algebraische Unendlichkeitsbegriff indefinit ist, besagt aber für die Geometrie noch gar nichts. Denn es ist, wie schon in ~ 30 gezeigt wurde, recht gefährlich, algebraische Anforderungen auf geometrische Wirklichkeiten zu übertragen. Die Geometrie ist nicht

Polargeometrie. 51 ein abgeleitetes Gebiet der Algebra, sondern ein Gebiet von selbständig empirischem Charakter. Während die Algebra als eine Wissenschaft des reinen Verstandes Endlosigkeiten enthält, weil der Verstand wie ein Wille kein Maß und kein Ziel kennt, ist die Geometrie als eine Wissenschaft der Wirklichkeit wesentlich anders geordnet. In ihr trifft man das objektive Maß und Ziel, nach welchem die unabhängig vom bloßen Verstand gegebene Natur gebaut ist. Die Algebra ist gleichsam, wenn man sich mit Schopenhauer ausdriickt, eine dem Willen adäquate Wissenschaft, während die Geometrie eine Wissenschaft der willensfrei geschauten räumlichen Ideen ist, welche Auffassung übrigens auch der hohen Meinung Platos von der Geor.metrie entspricht. Die algebraische Unendlichkeit ist indefinit. Die geometrische Unendlichkeit ist, wie auf Grund alles Bisherigen nicht bezweifelt werden kann, nichtsdestoweniger definit. ~ 46. Die Vcrwandschaft zwischen dem algebraischen und dem geometrischen Unendlichkeitsbegriff. Die Verwandschaft des algebraischen und des geometrischen ITnendlichkeitsbegriffes ist gegensätzlicher Natur. Die Algebra geht von einer als definit gesetzten Einheit. aus und entwickelt diese in der Richtung auf die indefinite Totalität. Die objektive Geometrie dagegen geht von der definiten Maximalkonstanten ~unendlich" aus und erlangt die Einheit erst durch einen divisiven Prozeß, der an beliebiger Stelle aufhört. Algebra und objektive Geometrie unterscheiden sich inderselben Weise wie die individuelle und die überindividuelle Staatstheorie. Während jene vom Individuum ausgeht und im Staat ein indefinites Wesen erblickt, setzt die letztere den definiten Staatsbegriff an den Anfang aller Überlegung und sieht im Individuum ein indefinites Atom, dessen Wert vom Belieben abhängt. Algebra und individuelle Staatstheorie sind von induktiver Eigenart, da sie vom festen Einzelnen zum unbestimmten Allgemeinen aufsteigen. Objektive Geometrie und überindividuelle Staatstheorie sind von deduktiver Struktur, da sie die Totalität. als definiten Begriff an den Anfang stellen und die kleine Einheit als divisives Resultat unseres Beliebens betrachten. In der euklidischen Geometrie ist eine solche deduktive Denkweise nicht möglich. 4*

052 Ernst Barthel, ~ 47. Die Kugeloberfläche als Anschauungsmittel der objektiven Planimnetrie. Es dcirfte sich nun empfehlen, sich über den Begriff Unendlich und iberhaupt über die bestehenden Zusarmenhänge der Polargeometrie ein klares, anschauliches Bild zu verschaffen. Da die Ebene keine Eigenschaft besitzt, welche sich vin den Eigenschaften einer Kugeloberfläche unterscheidet, außer der Eigenschaft der Ungokrümmtheit, die auf die nathematischen Zusammoenhäinge und Verläufe ohne Einfluß bleibt, lassen sich alle Verhältnisse in der Ebene auf einer Kugeloberflache darstellen. Diese Veranschaulichung ist bereits aus der Riemannschen Geometrie bekannt und soll hior mnr weiter ausgearbeitet werden. Was im folgenden gesagt wird, ist auch für solche Beurteiler, die aus irgendwelchen dem Verfasser unbekannton Gründen an der euklidischeni Geometrie glauben festhalten zu sollen, nicht ganz ohne Interesse, da es als Kapitel der Geometrie auf der Kugel auch an und für sich, ohne den Gedanken einer Übertragung aller Resultate auf die Ebene, einige neuen Sätze enthält. Nehmen wir also einen Globus zur Hand und suchen wir uns darauf zu orientieren. ~ 48. Die Orientierung auf dem Globus. JDer Kürze und Deutlichkeit halber seien hier auch geographisc he Ausdrücke gebraucht. Man nehme auf der Kugel einen Nordpol, einen Südpol und einen Äquator an. Pen Norldpol bezeichne man mit + 0, den Südpol mit - -o. Durch die e Pole lege man ein senkrechtes Achsenkreuz zweier Meridiane (Hauptkreise), dessen einen man als X-Achse, dessen andren man als Y-Achse bezeichne., Man unterscheide die südliche Halbkugel von der nördlichen recht deutlich durch eine andere Farbe, etwa durch einen grünen Anstrich,, während die nöidliche Halbkugel rot gefärbt sein möge. Diese Kugel hat zwei Normalstellungen, die wir mit A und B bezeichnen. Normalstellung A besteht dann, wenn der

Punkt + 0. dem Beobachter zugekehrt ist, und zwar so, daß die X-Ach-'e wagerecht verläuft. Normalstellung B besteht dann, wenn der Punkt + o dem Beobachter zugekehrt ist, wobei ebenfalls die X-Achse wagerecht verlaufen soll. Die Hauptkreislänge von Pol zu Pol heiße nach ~ 11 Def. XI ~unendlich", mit Zeichen r. Ein

Polargeometrie. 53 Viertelhauptkreis ist. dann also -, ein voller Hauptkreis 2 Di. Die Lange oc entspricht demnach dem Winkel von 180 Grad. ~ 49. Annahme einer endlichen Maßeinheit und Feststellung der Koordinatenbezeichnung. In der messenden', z. B. der analytischen Geometrie, ist es unerläßlich, eine endliche Maßeinheit anzunehmen, die sich von der objektiven Naturkonstanten ao durch beträchtliche Kleinheit unterscheidet. Auch auf dem Anschauungsmodell der Ebene, der Kugel, ist die Wahl einer solchen Einheit nötig. Man nimmt also auf X- und Y-Achse vom Schnittpunkt der beiden Achsen gerechnet eine ziemlich kleine, aber noch deutlich sichtbare Hauptkreisstrecke an und bezeichnet dieselbe mit 1. Durch Abtragung dieser Strecke auf dem ganzen Verlauf der Achsen erhält man die laufende Einteilung bis unendlich. Da die Einheit ein bestimmter Bruchteil der Länge unendlich ist, geht sie in 'der letzteren auch bestimmt viel mal auf. Die Zahl dieses Enthaltenseins ist aber von der Willkür abhängig, mit der man die Länge der Einheit festsetzt. Da diese Länge beliebig klein wählbar ist, ist die Zahl, welche ihr Enthaltensein in dar objektiven Maiximalkonstanten unendlich angibt, beliebig groß. Durch dieses Verhältnis wird der Charakter der Größe unendlich, als eine an keine bestimmte Zahl gebundene Lange, zweifellos gewahrt. Es sind nun noch die Vorzeichen der Achsen festzusetzen. Dafür gilt folgende Regel: In jeder Normalstelling bedeuten die Richtungen nach rechts und oben die positiven, die Richtungen nach links und unten die negativen Richtungen. Daraus folgt, daß jeder Punkt der Kugeloberfläche ein positives oder negatives x besitzen würde, je nachdem er auf Normalstellung A oder B bezogen würde. Um auch hier eine Eindeutigkeit zu haben, setzt man fest, daß in der Regel jeder Punkt der roten Kugelhälfte auf Normalstellung A, jeder Punkt der grünen Kugelhälfte auf Normalstellung B bezogen werden soll. Die Zählung von Einheiten erfolgt also in der Regel nur bis oO co x- -_ und yv + —, an welchen Stellen eine Umschaltung. e 2 2. der Gleichungen auf die neue NormalstellLng eintritt. Es bleibt

54 Ernst Barthel, noch nachzutragen, daß man selbstverständlich die Einheit 1 so wählen wird, daß sie in der Maximalkonstanten unendlich ohne Rest aufgeht, also ein einfacher Bruchteil derselben ist. ~ 50. Demonstrierung der Paralleleneigenschaften auf der Kugel. Der erste Gebrauch, den man von der Kugel als Modell machen wird, besteht natirlich in der Aufzeigung der Paralleleneigenschaften. Man ziehe also in beliebigen Abständen Parallelen zur X- und YAchse, d. h. Hauptkreise, die auf der Y- und X-Achse senkrecht stehen. Und Inan findet, daß die so entstehenden beiden Systeme von Parallelen sich in je zwei Punkten auf dem Ebenenäquator schneiden. Auch diese vier Kardinalpunkte seien dauernd festgehalten. Wir bezeichnen diejenigen Kard;nalpunkte, in welchen die Parallelen zur X-Achse sich schneiden, als die Kardinalpunkte I und II, wobei I auf der positiven Seite der Normalstellung A liege. Die Punkte, in welchen sich die Parallelen zur Y-Achse schneiden, heißen Kardinalpunkte. III und IV, wobei III auf der positiven Seite liege. Die Kugel hat also sechs Hauptpunkte, die um 90 Grad oder - voneinander entfernt liegen. Nämlich die beiden Pole und die vier Kardinalpunkte. ~ 51. Die Gleichung der Geraden. Im. folgenden wird kurz von Geraden gesprochen und als bekannt vorausgesetzt, daß diese im Modell als Hauptkreise erscheinen. Zeichnet man in Normalstellung A eine Gerade, welche die X-Achse im Abstand + a und die Y-Achse im Abstand + b schneidet, so hat diese die x y Gleichung: + 1. Diese Gleichung bezieht sich aber nur auf a b Normalstellung A. Um dies anzudeuten, schreibt man besser: x y -+ -b- 1, wobei der Index bedeutet, daß a und b vom Punkte + 0 ao bo x y aus gerechnet sind. Oder man kann, auch schreiben' + -- 1, wobei die nichts verändernde Beifügung + 0 die gleiche Bedeutung hat.

Polargeometrie. 55 Ergänzt man nun die Gerade zur Totalgeraden, und betrachtet sie in Normalstellung B, so zeigt sich, daß sie die X- Achse wieder im Abstande + a, die Y-Achse dagegen im Abstande -b schneidet. x y Sie hat also fir Normalstellung B die Gleichung: - - 1, ao b oo x- y oder: -+- + - 1. Letztere Gleichung deutet an, daß die Schnittpunkte der Geraden mit beiden Achsen in Normalstellung B sich von den Schnittpunkten in Normalstellung A um die Entfernung in positiver oder negativer Richtung unterscheiden. Jede Totalgerade hat demnach zwei Gleichungen, für jede x y Normalstellung eine einzige. Sie lauten:.. + - - 1, und: a ' 0 b +O x y -+ -1. Durch diese Erkenntnis wird die Natur der a+o c ' b+ -

Geraden als Kurve ersten Grades gewahrt. (Vgl. ~ 35.) ~ 52. Die Gleichung einer Parallelen zu einer Achse und die Gleichung des Ebenenäquators. Auf dem Standpunkt der euklidischen Geometrie hat die Parallele zur X-Achse im Abstand b die Gleichung: y b. Diese Gleichung kann in der Polargeometrie keine Gültigkeit haben, weil in dieser zwei Parallelen keinen gleichbleibenden Abstand voneinander besitzen, sondern sich schneiden. Von Linien konstanter Krümmung, welche konstanten Abstand voneinander besitzen, kann höchstens eine einzige eine Gerade sein. Die andern sind Kreise, was man sich ebenfalls an der Kugel bestens klarmachen kann. Zwei Geraden einer Ebene müssen sich notwendig schneiden. Die Parallele zur X-Achse im Abstande b auf der Y-Achse gemessen hat in der Polargeometrie die Gleichung, welche man von der Kugel abliest: I+ +- b- b 1. Diese Gleichung folgt unmittelbar - 2 b aus der allgemeinen Gleichung der Geraden ~ 51 und hat auch nicht den in der euklidischen Gleichung auftretenden formalen Mangel, daß die Größe x fortfällt.

56 Ernst Barthel, Der Ebenenäquator hat aus denselben Gründen die Gloichung: x v.... 'O ++ — 1. - 2 - 2 Bei dieser Gelegenheit sei ausdrücklich betont., daß die objektive 00 Konstante - in analytischen Gleichungen wie jede andere Konstante vollberechtigt figurieren kann. Sie darf nicht etwa durch die aus der Algebra geläufigen Approximationsverfahren beseitigt. werden. Zum x Beispiel ist -o durchaus nicht gleich null zu setzen. Denn die objektive Geometrie ist auch in Beziehung auf clas Unendliche eine exakte Wissenschaft. ~ 53. Der Verlauf der Hyperbel. Der Einfachheit halber sei zuerst von der gleichseitigen Hyperbel gesprochen. Es sei gegeben die Hyperbel x2 — y2 + a2 in Normalstellung A, und ihre Asymptoten. Die Hyperbel näahert sich wie eine parallele Gerade an ihre Asymptoten an, d. h. erreicht dieselben nicht früher als auf dem Ebenenäquator, also in der Entfernung 2 vom Achsenschnittpunkt. Daß sich Hyperbeln und ihre Asymptoten -(\^ z-^/ise zy^l '^7ldZ5te/Zt / Fig. 17. in reellen Punkten schneiden, ist ein untrennbares Analogen des Satzes, daß Parallelen- sich in reellen Punkten schneiden und folgt schon aus der Tatsache, daß auf der Kugel ein anderer Verlauf gar

Polargeometrie. 57 nicht denkbar ist, wenn die Hyperbel in beiden Normalstellungoe Hyperbel bleiben soll, was wohl nicht bezweifelt werden durfte. Die Hyperbel x2 — y2 + a tritt also am Ebenenäquator in den Nebenwinkel ihrer Asymptoten ein'). Sie erscheint in Normalstellung B als Hyperbel, deren Pole auf der Y-Achse liegen. Während sie in Normaistellung A wagerecht verläuft, verläuft sie in Normalstollnmg B senkrecht. In Stellung A hat sie zwei Pole auf der X-Achse, in Stellung B zwei Pole auf der Y-Achse. Nun ist aber allgemein bekannt, daß eine Hyperbel mit den Polen auf der Y-Achse, eine sog. konjugierte Hyperbel, die Gleichung;besitzt: x -y2 _ a2. Wir können also dem bisherigen zwei Folgerungan entnehmen: 1. Die ursprüngliche Hyperbel in Normalstellung A und die konjugierte Hyperbel in Normalstellung B bilden denselben Linienzug. 2. Die rote Ebenenhälfte unterscheidet sich von der grünen analytisch durch das Vorzeichen der Konstantten a2. Die Hyperbel welche auf der roten: Hälfte die' Konstante + a2 hat, erhält auf der grlnoenHälfte die Konstante -a 2. Das heißt: rote und grüne Hälfte der Ebene unterscheiden sich durch das Vorzeichen der quadratischen Konstanten. Diese Erkenntnis wird bald in besonderer Weise ihre Dienlichkeit bezeugen. ~ 54. Die konjugierte Hyperbel derselben Normalstellung als Gegenhyperbel der ursprünglichen. Es ist augenscheinlich, daß jedem Punkt auf der Kutgeloberlfäche ein Gegenpunkt entspricht, der um 180 Grad von ihm entfernt ist. Zeichnet man nun eine wagerechte Hyperbel in Normalstellung A, welche in. Nornalstellung B als senkrechte Hyperbel erscheint, und bildet man die Kurve der Gegenpunkte dieser Kurve, so findet man, daß es die senkrechte Hyperbel in Normalstellung A und also die wag,rechte Hyperbel in Normalstellung B ist. Man halte demnach fest, daß jeder Asymptotenwinkel zu zwei Hyperbelverläufen Anlaß gibt, deren jeder in sich selbst zurücrkläuft, deren jeder auf einer Ebenenhälfte senkrecht, auf der anderen Ebenenhälfte wagerecht verläuft, und deren jeder sich aus den Gagenpunkten 1) Diese Dinge sind sogar in der Geometrie der Kugeloberfläche als solcher noch neul.. Heger, Analyt. Geom. auf d. Kugel, erwähnt nichts von den Verläufen der Kugel-kegelschnitte.

58 Ernst Barthel, des andern zusammensetzt. Diese schönen Beziehungen sind für Cdie objektive Geometrie eine weitere Empfehlung. Was die Gleichungen betrifft, so wird man sie nach dem Prinzipl formulieren, daß dieselbe Kurve in ihrem ganzen Verlaufe dieselbe Gleichung behalten soll. Dann ergibt sich folgende Tabelle 1. Normalstellung A, wagerechte Hyperbel: x2 -y2 a2. 2. Normalstellung B, senkrechte Hyperbel: x2 - y2 4- a2. Diese senkrechte Hyperbel, welche in Normalstellung A die negative Konstante haben müßte, hat hier

die positive Konstante, weil die Unendlichkeitshälfte der Ebene alle Vorzeichen umkehrt. 3. Normalstellung A, senkrechte Hyperbel: x -- y2 = - a2. 4. Normalstellung B, wagerechte Hyperbel: x2 -y2-= a2. Diese wagerechte Hyperbel, welche in Normalstellung A die positive Konstante haben müßte, hat hier die negative Konstante, weil die Unendlichkeitshälfte der Ebene alle Vorzeichen umkehrt. S: chließlich dürfte die Bemerkung am Platze sein, daß entgegengesetztes Vorzeichen quadratischer Konstanten nur bei Gegenkurven, d. h. Kurven aus Gegenpankten, auftritt, und daß diese Umkehrung des Vorzeichens bei Gegenkurven ein allgemeines Gesetz ist, das sich z. B. auch bei der Ellipse bewähren wird. ~ 55. Bemerkung über die allgemeine Hyperbel. Dieselben Zusammenhänge, die für die gleichseitige Hyperbel abgeleitet wurden, bestehen auch für die allgemeine Hyperbel von x2 2 der Gleichung -- - 1. Es ist nur noch darauf aufmerksam zu machen, daß die Hyperbel, welche in Normalstellung A die X-Achse im Abstande a schneidet, in Normalstellung B die Y-Achse im Abstande b trifft. Ähnlich ist das Verhältnis bei der Gegenhyperbel. Da allgemein die Lehre vertreten wird, eine wagerecht verlaufende Hyperbel schneide die Y-Achse in imaginären Punkten, d. h. überhaupt nicht, während die objektive Geometrie ausdrücklich zwei reelle Schnittpunkte mit der Y-Achse behauptet und vorzeigt, haben wir diesen Zwiespalt zu erklären. Dies kann nicht dadurch geschehen, daß etwa eine der beiden Behauptungen als unzutreffend dargetan wird. Sie sind zweifellos beide wohlbegründet. Sondern es geschieht wieder in sehr einfacher Weise dadurch, daß man erkennt, daß die

Polargeometrie. 59 algebraische Analyse, welche zu inaginären Schnittpunkten fiihrt, nur auf eine Ebenenhälfte sich bezieht, z. B. auf die rote. Die Aussage der Polargeometrie dagegen spricht von der Totalebone in ihren beiden Hälften. Vgl. auch ~ 62. ~ 56. Die Darstellung der Totalebene durch die Lambertsche Münze. Die Darstellung der Totalebene durch eine Kugeloberfläche hat zw(ei Mißstände, einen praktischen und einen theoretischen. Der praktische besteht darin, daß es nicht leicht ist, eine Kugeloberfläche mit bestimmten Kurven in einem Buche klar und bequem abzubilden.)or theoretische Nachteil liegt darin, daß das zweidimensionale Gebilde der Totalebene durch die Kugel ein dreidimensionales, d. h. gekrümmtes Aussehen erhält, wodurch jede Möglichkeit, auch den Totalraum auf ähnliche Weise abzubilden, ausgeschlossen ist. Dena vier Dimensionen stehen uns nicht zur Verfügung. Deshalb soll jetzt ein neues Mittel angegeben werden, um die Totalebene abzubilden, welches die soeben genannten Mangel nicht an sich hat. Dies ist das Gebilde, welches wir als Lambert.sche 3tinze bezeichnen wollen. Es ist bekannt, daß Johann Heinrich Lanibert der Erfinder derjenigen Kartenprojektion ist, die gestattet, eine Hälfte der Erdkugel: als Kreis darzustellen. (Flächentreue Azimutalprojektion.) In den meisten besseren Atlanten findet man auch eine Darstellung der beiden Erdhalbkugeln. der nördlichen und der südlichen, in der Lambertschen Projektionsform. Handelt es sich uim diese beiden Halbkugeln, so erscheinen die Breitenkreise als ebene Kreise und die Meridiane als Geraden, die sich im Mittelpunkt dieser konzentrischen Kreise strahlenförmig schneiden. MIan kann in dieser Weise eine Kugeloberfläche mathematisch korrekt auf zwei Kreisflächen darstellen. Man kamn also die Totalebene ebenfalls durch zwei Kreise mathematisch korrekt darstellen. Es ist nun gewiß empfehlenswert, die organische Einheit der Kugel oder der Totalebene auch im. Mod.ell zu wahren. Dies geschieht am besten dadurch, daß man sich die beiden Kreisflächen hintereinander geklebt denkt, oder daß man sie auf die Vor- und Rückseite ein und desselben kreisförmigen Stiickes Papier gezeichnet denkt. Die ganze Totalebene ist also unter Benützung der Lambertschenl Projektionsformt als Mtiiize darstellbar, deren eine Seite den roten, deren andere Seite

e6~0 ~Ernst Barthel, den grünen Teil des Kugelmodells der Ebene enthält. Die logische Zweiteilung der Ebene wird sehr treffend durch die beiden Seiten der Münze ausgedrückt. Die Münzenfläche ist also stets als sog. "einseitige Fläche" aufzufassen. Im folgenden benutzen wir die Lambertsihe AMünze regelmäßig zur Darstellung der Kurvenverläufe auf der Totalebene. Wir zeichnen dabei die Vor- und Rückseite der Münze nebeneinander. Wir bezeichnen diese beiden Hälften der Ebene als Stellung A und Stellung B, ganz entsprechend der Normalstellung A und der Normalstellung B am Kugelmodell. Die Münze werde immer um die Y-Achse gedreht. Die theoretische Bedeutung der Lambertsshen Münze liegt darin, daß sie erlaubt, die ganze unendliche Ebene dei objektiven Geometrie mathematisch getreu auf einer endlichen Fläche ohne Vermehrung der Dimensionen abzubilden. Daß dabei die Umkehrbarkeit der Münze die wesentliche Rolle spielt, ist augenscheinlich. Dieser Charakter der Lamberts-hen Münze läßt erhoffen, daß man durch ihre Vermittlung auch den dreidimensionalen Totalraum werde mathematisch adäquat abbilden lernen. In einem späteren Paragraphen soll darauf näher eingegangen werden. ~ 57. Darstellung des Verlaufes einer gleichseitigen Hyperbel auf der Lambertschen Münze. Da durch die Paragraphen 53 und 55 bereits Aufschluß über den Gesamtverlauf von Hyperbeln gegeben ist, erübrigt sich nur noch, J^e/IunAl ckel4uzgr.e Fig. 18.x. zs Fig. 18. den Verlauf aufe e d er Lambertschen hanle zu ver anschaeulichgen. Wir wählen als Beispiel der Einfachheit halber eine gleichseitige Hy

Polargeometrie. 61 perbel. Deren Verlauf bei positivem a ist der folgende, wobei festzuhalten ist, daß der Durchmesser der Münize die Länge unendlich darstellt, aus welchem Grunde die entsprechende Länge a für deri,JHyperbeldurchmesser" in der Regel sehr klein sein wird. Wir zeichnen nur diese Figur, da ein Komm.entar durch die ~~ 53 und 55 bereits geliefert ist. ~ 58. Der Verlauf der Parabel und seine Darstellung Zugrundegelegt sei die Parabel, deren Scheitelgleichung y2 = 2px ist. Es fragt sich, 1. welches ihr Gesamtverlauf auf der Ebene ist, d. h. ob ihr größter Durchmesser a oder o oder 2 co beträgt; 2. welchen Maximalwert, die Ordinate y der Parabel erreicht.. Denn daß ein solcher Maximalwert besteht, folgt aus der Insichgeschlossenheit der Ebene. Und aus demselben Grunde ist klar, daß uns mit der unbestimmten Angabe der Lehrbücher, welche auf euklidischem Standpunkt stehen, nicht gedient ist. Die Lehrbücher lassen. uns hier ganz irm Stich. Betreffs der ersten Frage ist sicher, daß der größte Du.rchmesser nicht 2 o betragen kann. Sonst müßte die Parabel wie die Hyperbet aus zwei Ästen beatehen, die sich vom gemeinsamen Scheitel ause von einander entfernen. Die Analytik lehrt zweifellos, daß die sich. nach der entgegengesetzten Seite entfernende Parabel einen negativen Parameter besitzt, also eine andere Kurve darstellt. Es ist, wie bald gezeigt wird, die Gegenkurve der ursprünglichen Parabel. Ferner ist auch sicher, daß der große Durchmesser einer Parabel nicht die Länge - haben kann. Denn da die in der Nähe des Poles zu diesem Durchmesser parallelen Sehnen aus Grinden des analytischen Zusammenhanges bekanntlich als Du)rchmesser aufgefaßt werden müssen, und da diese Durchmesser sich alle in der Entfernung-2 vom Scheitel schneiden, kann sich in dieser Entfernung erst der Mittelpunkt, nicht aber der zweite Scheitel der Parabel befinden. Es bleibt also nur die IMöglichkeit übrig, daß der größte Durchmesser einer Parabel die Länge oo besitzt, welche Möglichkeit auch dadurch als einzig zutreffend erwiesen wird, daß auf ihrem Grunde

(MC% ~ Ernst Barthel, die beiden Parabeln y = 2 px und y = - 2 px als Gegenkurven, d. h. als Kurven aus den sphärischen Gegenpunkten, 'erseheinen. Gegengründe gegen die Annahme bestehen nicht. Es ist also nunmehr als festgestellt zu betrachten, daß die Entfernung zwischen den beiden Polen einer Parabel die Strecke o beträgt. Bezüglich der zweiten Frage hat man sich an die Gleichung zu 00 halten. Zu bestimmen ist, welchen Wert y für x = erhält. Es ergibt sich hierfür unmittelbar: y- 1/2 p., wobei die Natur00 konstante -2 in keiner Weise beseitigt werden kann, sondern als definite Strecke ihre gewöhnliche geometrische Bedeutung hat. Der Maximalwert der Parabelordinaten beträgt also nicht, wie man mitunter lesen kann, ~unendlich", sondern 2 p. -2 Wir haben nun die Parabel auf der Lambertschen Münze abzabilden. Dies geschehe für die Gleichung y = 2 p x, und wir halten es für empfehlenswert, die Parabel y2 = -2px gleich mit auf dieselbe Figur zu zeichnen, da man auf diese Weise klar erkennt, daß diese Kurve die Gegenkurve der ursprünglichen ist. Sie wird zum Unterschied von der ersten Parabel gestrichelt.] I zyl J ~r Fig. 19. Es empfiehlt sich, die Aufmerksamkeit darauf zu lenken, daß jede Parabel, genau wie es von der Geraden ausgemacht wurde, nur eine Ebenenhälfte bedeckt, und daß die andere Ebenenhälfte für die Gegenkurve reserviert bleibt. Die Ebenenhälft.en für die obigen Parabeln fallen jedoch nicht mit den Seiten der Münze zusammen, sondern teilen, wie man sieht, diese Seiten in zwei Hälften.

Polargeometrie. 63 ~59. Eine neue Eigenschaft der Parabel. Da man für die Parabel im allgemeinen nur die Scheitelgleichung in Betracht zu ziehen pflegt, hat man eine schöne Eigenschaft dieser Kurve, welche sich auf die Brennpunktsgleichung stützt, bisher iibersehen. Sie möge hier angegeben sein. Zunächst aber seien auch einige besonders empfehlenswerten Formen der Brennpunktsgleichung angegeben, und zwar für diejenige Lage der Parabel, bei welcher die große Achse mit der Y-Achse zusammenfällt. Diese Stellung der Parabel glaubt der Verfasser wegen ihres besonderen Beziehungsreichtunms als die Normalstellung der Parabel bezeichnen zu sollen. Die Brennpunktsgleichungen der Parabel, von deren Richtigkeit sich jeder Nachprüfende leicht überzeugen kann, lauten: 1. x2 = p(p-2y). 2. x2 = (a - y). (a - y), wobei a =p - y ist. (Siehe Figur.) 3. X2 a2 y2. 4. a +y a -y x X 5. (a)2(v)2 6. tang271 -tang2y7 1, wobei a: x gleich tgy7, y x gleich tg7 gesetzt ist. (Siehe Figur.).......;-; _ / -- \ Fig. 20. Die neue Eigenschaft der Parabel, die hier festgestellt werden soll, bezieht sich auf das Ähnlichkeitsverhältnis, welches zwischen den Teilen der Kurve über und unter der

X-Achse besteht. Es ist nämlich, da -X = tangy beträgt, x2 - 2 px. tangy -p2 =0. Also: x

Page 64

64 Ernst Barthel, ~~~ —.' — - c in) x p. tang ~ p. tg2/p (+tg97se7) Wir setzen nun 7 positiv und negativ, um die Werte von x und y sowohl für den oberen als für den unteren Teil der Kurve zu bestimmen. (Siehe Figur.) Dann wird bei negativem Winkel der Sinus das Vorzeichen. wechseln, währeird der Cosinus unverändert bleibt. Wir bezeichnen die Koordinaten für den oberen Teil der Kurve mit dem Index o, die Koordinaten für den unteren Teil mit dem Index i. p (1 - sin') p (1 1+ sin7) Dann ist' xo =x ann ist +cos7 U +-cos7; Yo- Xo.tg/~;.yu - x ~tg 7. Nun besagt die Gleichung x2 = p (p-2 y), daß jedes x mittlere Proportionale zwischen p und p-2y ist. Stellt man letztere Strecke geometrisch dar, was in der Figur geschehen ist, so erkennt man aus den Diagonalen, daß der Endpunkt E zusammen mit F, Po, und denm zu Po bezüglich der Y-Achse symmetrischen Punkt Po' stets ein Rhombus bildet. Jeder Parabelpunkt ist also mit einem Rhombenpaar verbunden zu denken, dessen zweiter Rhombus nach der unteren, bzw. oberen Gegenseite liegt und den durch den Winkel - 7 bezeichneten Parabelpunkt zur Ecke hat. Die neue Parabeleigenschaft lautet demnach: Bewegt sich ein Punkt auf der Parabel, so bewegt sich als seine Funktion ein scheitelwinklig zusammengefi.gtes Rhombenpaar, dessen Seiten sich verhalten xo l - sin7 wie -' 1= ----i n y oder reziprok, und dessen Diagonalen jedesmal x, i + sin 7 gleich 2x und. 2y sind. Die Parabel ist also der geometrische Ort eines alle positiven reellen Werte durchlaufenden Ähnlichkeitsverhältnisses, das beim Durchgang durch die X-Achse gleich 1 wird. Interessant ist wohl auch die Tatsache, daß die Parabel x2 - y3 = a2 und der Kreis x2 + y2 = a2 äußerlich genau dieselbe Gleichung besitzen. Nur ist beim Kreis die Länge a eine Konstante, während bei der Parabel das a die Variable (p-y) bedeutet. Für den Maximalwert des x hat der untere Rhombus beide Parabelbrennpunkte zu Ecken, während der„obere" Rhombus für diesen Ibergangswert in doppelter Ausführung existiert, nämlich in jeder der beiden Parabelkuppen ein Mal. Und zwar fällt jeweils einer seiner Eckpiiunkte mit dem Brennpunkt zusammen, während der gegenüberliegende in den Leitpunkt L fällt.

Page 65

Polargeometrie. 65 Obwohl all diese Beziehungen zum Verständnis der Polargeometrie nicht notwendig sind, wird man ihren reizvollen Charakter, so bald man sich in sie versenkt, lebhaft empfinden. Aus diesem Grunde schienen sie dem Verfasser der Miitteilung nicht unwert zu sein. ~ 60. Konstruktion des Ausdruckes / 2.. Inm vorletzten Paragraphen wurae die Länge 1 2 p. - ls Maximalwert der Ordinate einer Parabel y2 p x nachgewiesen. Es fragt sich, welche Länge diese Größe im Vergleich zu 2 besitzt, und wie man sie konstruiert. Selbstverständlich kann eine Konstruktion mittelst unendlicher Längen schon deshalb nicht in Betracht kommen, weil das Ziehen von Parallelen auf so große Entfernungen nicht dazu benutzt werden kann, auf elementare Weise ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. Diese Verwandlungsaufgabe würde ja verlangen, daß Parallelen als Geraden von gleichbleibendem Abstand.aufgefaßt werden können. Deshalb kann die Konstruktion des obigen Ausdruckes nur in verkleinertem Maßstabe, also mittelst der Lambertschen Miinze, exakt vorgenommen werden. Dies geschieht wie folgt: Man lege eine 00 Strecke - und eine inm selben Maßstab verkleinerte Strecke 2 p aneinander. Man schlage iiber der Gesamtstrecke den Halbhkeis. Man errichte im. Teilpunkt T der beiden Strecken das Lot. Dieses treffe den Halbkreis in einem Endpunkte E. Dann ist nach dem Satze von der Beziehung zwischen Höhe und Höhenabschnitten eines Dreiecke die Strecke T E die gesuchte Wurzel. Es läßt sich also von Fall zu Fall feststellen, welchen Bruchteil der Länge - die Strecke / 2p. 2 bildet, und man kann ihren Betrag auf jeder Lambertschen Müize genau abtragen. Da die Strecke 2 p im Verhältnis zu 2,' "+ i. ". in der Regel sehr.klein sein wird, ist die 2p. 2 in der Regel eine Strecke, nwelche ebenfalls die Länge 2 bei weitem nicht erreicht. 5

 Ist dagegen 2p= so wird auch 2 p d. h. die Parabel, deren Maximalordinate 2 beträgt, hat einen Parameter p vol 4 Dieser Grenzfall kann auf der Kugel demonstriert werden. ~ 61. Ellipse und Gegenellipse. Die logische Zweiteilung der Ebene war Anlaß und Hilfsmittel x y zugleich, um den Gegensatz der Geraden - -Ä-0-0+ - 1 und x y x2 v2 x2 a+.-.+ cc l, der Hyperbeln a -- -- und r V2 - " = -1, sowie der Parabeln y2 2 px und vy -2 px aufzustellen und zu erklären. Auch bei der Ellipse besteht dieser komx2 y2 plementäre Gegensatz, und zwar in den Gleichungen -- - -- + 1 x2 y2 und + - a2 b2 ~ 62. Näheres über die Gleichung x2 + y = -r2. Obige Gleichung stellt nach der allgemein angenommenen Theorie einen Kreis mit imaginärem Radius dar. Man könnte daher auf den Gedanken kommen, unsere Erklärung im vorhergehenden Paragraphen sei falsch, da sie dem Kreis scheinbar einen reellen Radius zuweist. Um diesen Punkt klarzustellen, mögen folgende Überlegungen gestattet sein: Faßt man quadratische Konstanten ins Auge, so erscheint die grüne Hälfte der Ebene als Ort negativer Konstanten. Faßt man dagegen lineare Konstanten ins Auge, so erscheint dieselbe Ebenenhälfte als Ort imaginärer Konstanten. Wir sagen daher deutlich: Die grüne Ebenenhälfte ist der Ort negativer quadratischer, d. h. imaginärer linearer Konstanten. Damit ist unsere Erklärung der strittigen Gleichung mit der Lehre vom Imaginären algebraisch vollkommen in Einklang gebracht.

Page 67

Polargeometrie. 67 Indessen besteht doch noch ein Gegensatz gegen die übliche geometrische Darstellung des Imaginären, die uns zu einer weiteren Überlegung veranlaßt. Wenn man, von der arithmetischen Zahlenachse ausgehend, die imaginären Zahlen auf einer Achse senkrecht dazu darstellt, so ist dieser Modus eine ganz willkürliche Festsetzung, die sich aber durch praktische Brauchbarkeit zur Veranschaulichung komplexer Zahlen bewährt hat. Indessen ist dieselbe Art der Darstellung imaginärer Zahlen vollkommen ausgeschlossen, wenn man von der analytischen Geometrie der Ebene ausgeht. Dann nämlich ist ja schon die ganze überblickbare Ebene, welche durch X- und YAchse beherrscht wird, von reellen Punkten ausgefüllt, und es ist also fiir imaginäre Größen da gar kein Raum. Es fragt sich also von neuem, wie man die imaginären Zahlen geometrisch lokalisieren soll. Denn gerade vom Standpunkt der analytischen Geometrie aus wird man sehr dringend auf imaginäre Längen geführt. Die Lösung kann, so viel ich sehe, keine andere sein als die von uns hier vertretene, daß die imaginären Längen auf der grünen Hälfte der Ebene liegen. Die Zweiteilung der Ebene ist eine genaue Analogie zur Zweiteilung reeller und imaginärer Längen, oder positiver und negativer Quadrate. Wier mit dieser Theorie. nicht glaubt einverstanden sein zu dürfen, müßte nicht nur obige Gleichung mit einer anderen passenden geometrischen Deutung versehen, sondern er hätte offenbar auch die Pflicht, uns mitzuteilen, wie er denn imaginäre Längen auf der analvtischen Ebene anders darstellen will. W\ie bei den drei übrigen Gruppen von Kegelschnitten, so erklärt sich auch dieser Gegensatz aus der Zweiteilung der Ebene. Die Ellipse x2 + y2 - -r2, die man auf Grund der euklidischen Geometrie durchaus nicht unterbringen kann, bedeutet sehr einfach nach genauer Analogie der Hyperbel x2 -y2 -r2 die Gegenkurve der Ellipse x2 + y2 = r2. Verläuft die letztere um den Punkt + 0, so verläuft die erstere um den Gegenpunkt + o. Liegt die letztere auf der roten Ebenenhälfte, so liegt' die erstere auf der grünen. Zur Erläuterung sei hier der soeben in Gleichung genannte Kreis und Gegenkreis auf der Lambertschen Miünze dargestellt. Er gelte als Beispiel für die allgemeine Ellipse. Besonders hervorgehoben sei nochmals, daß nur die Polargeometrie imstande ist, die Gleichung x2 + y2= — r2 unterzubringen, und daß 5*

68 Ernst Barthel, nur die Polargeometrie gestattet, alle möglichen Kegelschnitte mrit sämtlichen Grenzfällen restlos darzustellen. Dies geschieht auf der Kugeloberfläche oder auf der Lambertschen Münze. Es ergibt sich daraus, daß nur eine einzige Geometrie existiert die den Bedürfnissen des menschlichen Geistes allseitig gerecht wird O~ellun~.R GteZi&njBgr I I ~AL Y — /zse> x-~~Z=r2 \ ufsye \Gregt. / 2-.l Fig. 21. -nämlich die Polargeometrie, welche von Desargues und der nachfolgenden projektiven Geometrie bis Ponceiet und Steiner deutlich vorbereitet, von Riemann und Helmholtz grundsätzlich neben die euklidische Geometrie gestellt wurde und von dem gegenwärtigen Buche als einzig kritische Elementargeometrie erwiesen wird.)er populäre Einwand, daß die Ebene aber in Wirklichkeit keine Kugel sei, dürfte übersehen haben, daß die Polargeometrie auf dreizehn klaren Definitionen beruht, deren Übereinstimmung mit dem Sprachgebrauch nicht bezweifelt werden kann. Auf Grund dieser)efinitionen hält die Polargeometrie die Begriffe ~Ebene "und,Kugel' scharf auseinander, ohne jedoch zu übersehen, daß sie beide als Flächen mit konstantem Krimmungsmaß alle wesentlichen Eigenschaften gemeinsam haben. ~ 63. Empfehlung der Benutzung einer Kugel. Es ist dringend anzuraten, sich die hier genannten einfachen Gesetze der Kegelschnitte auf einer wirklichen Kugel klar zu machen.)ie Schönheit der Zusammenhänge und die Unerläßlichkeit ihrer Annahme ist nur bei konkreter Anschauung voll zu erfassen. Bei dieser Gelegenheit wird der Leser den bescheidenen Anfängen, die hier ge

Polargeometrie. 69 geben sind, aus eigenen Mitteln gewiß manches Neue hinzufügen können, da die Erkundung der Kegelschnitte auf der Kugel ein ebenso fruchtbares wie aufschlußreiches Gebiet darstellt. Erst auf der Kugel erhalten die Kegelschnitte ihre wahre Vollendung. Erst hier kann man ihren vollständigen La.uf iberblicken. Erst hier verschwinden die Regionen, in denen bisher der Gedanke im Dunkeln zu tappen verurteilt war. Es wird daher wohl eine Zeit kommen, wo der Lehrer und Professor der Geometrie seine Figuren nicht mehr auf die Wandtafel, sondern auf einen entsprechend großen Globus zeichnet, wenn nicht vielleicht sogar Laminbertsche Mü'nzen in reichlichen Gebrauch kommen sollten. Denn eine Wandtafel stellt ja nur ein winziges Fragment der Ebene dar, während die beiden moderneren Darstellungsmiittel die gesamte Ebene repräsentieren. Sie erst sind also imstande, auch die durch das Unendliche verlaufenden Kurven in ihrer ganzen:Baln naclh mat.hematisch exaktem Gesetz darzustellen. N 64. Ellipse, Parabel und Hyperbel in ihrem Zusammehhang.)Daß die Parabel den kontinuierlichen Übergang zwischen Ellipse und Hyperbel darstellt, vorausgesetzt daß die Abwandlung der Figur liach geeigneten Gesetz geschieht, ist eine der ältesten Erkenntnisse der Kegelschnittgeometrie, die durch zahlreiche Beziehungen erhärtet wird. Den lä,ngst bekannten Kennzeichnungen dieses Überganges sei hier eine neue hinzugefügt, die sich nur auf der Kugel feststellen laäßt. Man zeichne auf der Kugeloberfläche eine vollständige Hyperbel, Parabel und Ellipse. Bezeichnet man in diesen drei Figuren denjenigen DJ-trchmesser, der sich innerhalb der Kurve zwischen den beiden entgegengesetzten Hlauptpolen erstreckt, als die große Achse der Figur, so besteht das Gesetz: Die große Achse einer Ellipse ist kleiner als oc, größer als 0. Die große Achse einer Parabel ist gleich c. Die große Achse einer Hyperbel ist größer als Ic, kleiner tals 2 As. Dieses Gesetz ist gewiß der Mitbeachtung wert. Man verkannte es bisher deshalb, weil man in Ermangelung des Überblickes bei der Hyperbel anstelle der soeben definierten großen Achse ihre Differenz

 von 2 c in Betracht zog und diesen äußeren oder Scheindurchmnes.s r, der natürlich stets kleiner als ac bleibt, als sog. große Achse" (2a) der Hyperbel bezeichnete. ~ 65. Die Gerade als Grenzfall von Ellipse, Hyperbel und Parabel. x2 v2. Läßt man bei der Ellipse + die Achse b bis wachsen a2 b2 so geht die Ellipse in ein Geradenpaar über, das bezüglich der X-Achse zur Y-Achse parallel verläuft. Dasselbe Geradenpaar ergibt sich als x2 V2 _ Grenzwert der Hyperbel - - fir b. (Siehe Figur.) a'2 b22 ' Di)eses Geradenpaar bildet ein Geradenzweieck, wie denn überhaupt die Tatsache ausge - sprochen zu werden verdient, daß die Polargeometrie Ge\radenzweiecke kennt, ja auch \ l b(bl Geradendreiecke mit einer Winkelsumme his zu drei R echten, welche Verhältnisse m anl sich wieder atuf cder Kugel klarmachen kanl. Aus der obigen Übergangsbeziehung geht hervor, daß der Grenzwert zwischen Ellipse und Hyperbel unter Umständen keine Parabel

Fig 22. zu sein braucht, sondern auch ein Geradenpaar sein kann. Es ist ferner bekannt. daß jede Hyrerbel, deren beide Achsen gleich null werden, in das Asymptotenkreuz ibergeht, welcher Fall der Vollständigkeit halber angefihrt sei. oc Es ist ebenso klar, daß die Parabel y 2 2px fir 1p = - i i hr'(Scheiteltangente übergeht. Ebenfalls selbstverständlich ist, daß der Kreis x2 + y2 =(2, eine Gerade ist, und zwar der Ebenenäquator.

Page 71

Polargeometrie. 71 ~ 66. Das wesentliche Verhältnis von Gerade, Kreis und Punkt. Der Kreis mit den: Radius 0 ist ein Punkt. Der Kreis mlit dem Radius 9 ist eine Gerade. Gerade und Punkt sind also die extremean Grenzwerte eines Kreises. Sie stehe an den de eiden Eckpunkten einer kontinuierlichen Reihe. Sie besitzen also einen polaren oder dualen Gegensatz. Der Kreis ist gleichsam nur der verbindende Übergang zwischen den Extremwerten der Geraden und des Punktes. Daher ist der Kreis auch eine Einheit von Punkt und Linie, nämlich volt Mittelpunkt und Peripherie. Der duale Gegensatz von Gerade und Punkt ist in sehr spezieller Weise besonders d.urch Brianchon und Poncelet in der projektiven Geometrie fruchtbar benutzt worden. Lidem wir durch obige mehr philosophische Bemerkung auf die wesentliche Grundlage dieses d.ualen Gegensatzes hinweisen, fügen wir zugleich die Hinweisung bei, daß im stereometrischen Teil dieses Abschnittes die Dualität zwischen l'unkt und Gerade noch in einer anderen, sehr auffälligen Form aufgezeigt werden wird. (Vgl. ~ 75.) ~ 67. Die Arc af unktion. Es ist allgemein bekannt, daß die Formeln der ebenen Trigonometrie als Grenzfälle der Formeln der sphärischen Trigonon.etrie ftr unendlichen Radius betrachtet werden kinnen. Zum Beispiel läßt sich der ebene (-osinussatz als Grenzfall des sphärischen Cosinussatzes ableiten. Da jedoch in der ebener; Trigonometrie Strecken vorkomnmen, während die sphärischen Formeln nur Winkelfunktionen enthalten, findet beim Übergang einer Formel in das andere Gebiet in der Regel eine bedeutende Ändeiung der Form statt. Es ist nach allem, was bisher über das Verhältnis von Ebene und Kugeloberfläche gesagt wuide, nicht zu bezweifeln, daß es noch andere trigononmetrische Formeln geben muß, die ohne jeitde Veräacterung sowohl plan als sphärisch giltig sind. Es gibt zwei Wege, um die gesuchten UnJiversalfcormniel zu erlangen. Entweder n:an geht von der spärischen Trigonometrie aus und überlegt, daß jede Strecke ein bestimmter Bruchteil der definite i Miaximalstrecke xc ist. Da die Strecke -, so viel bedeutet wie der Winkel

72 Ernst Barthe 1, von 90~, ist es zulässig, auch den Begriff einer Streckenfunktion sin a, cos a, tang a, cotang a, sec a, cosec a zu bilden. Der Wirkel, welcher einer Strecke a entspricht, wird in der Regel sehr klein sein. Das hindert abe- nicht, daß die Formehl dei sphärischen Trigonometrie ohne Änderung auch auf die ebene Trigoncmetrie angewandt werden können. Diesem ersten Wege zur Gewinnung trigonometrischer Universalfoinmeln läuft ein anderei parallel, der seinerseits von der ebenen Trigonometrie ausgeht. Es ist bekannt, daß man auf irgend einer Kugel das Verhältnis eines Hauptkreisbogens a zum Radius r als den Arcus von a (arc a) bezeichnet. Die Arcusfunktion aber erlaubt die Gewinnutg von Ulniversalformelh aus der ebenen Trigonometrie. Nehmen wir als Beispiel den ebenen Cosinussatz' a- 2 + -2 bec. cos,. Diese Gleichung dividiere manr durch r2 =. Dann lautet sie: arc 2 a -- arc2 b + are2 c. - 2. arc b. arc c. cos c. Diese Gleichung hat nicht nur auf der Ebene, sondern auch auf jeder Kugel Gültigkeit. Der einzige formal ganz belanglose Unterschied ist der, daß für eine Kugel der Radits kleiner als 2 ist. Es ist vielleicht besonders bemerkenswert, daß für gewöhnliche, also im Vterhältlis zlu sehr kleine Strecken der Ebene die Arcusfunktion unendlich kleine Größen darstellt. Die trotzdem ganz zutverlässige Rechnung mit der Arcutsfunktion spielt demnach in der Trigonometrie eine ähnliche Rolle wie die Rechnung mit unendlich kleinen Zahlenwerten in der höheren Analysis. Zusammenfassend stellen wir fest, daß jeder trigonometrische Zusammenhang auf zwei Weisen durch eine Universalformel darstellbar ist, die sowohl in der Ebene als auf der Kugel ohne Anderung giiltig und brauchbar ist. üir den Cosinussatz z. B. lauten die beiden Universalformeln: 1. cos a = cos b cos c + sin b sin c cos f. 2. arc2 a = arc2 b + arc2 c -2. arc b arc c* cos (. Jede dieser Formehl ist sowohl plan als sphärisch verwendbar. Es diirfte cich empfehlen, in Zukunft die beiden Gebiete der Trigonometrie nicht nacheinander, sondern miteinander zu behandeln. Obwohl es sehr erklärlich ist, daß un Lauf der Geschichte zuerst die ebenen Beziehungen und erst verhaltnismäßig spat die sph~ärischen Beziehungen studiert Nwurden, so ist dies doch kein Grund, das unorganische Nach

Polargeometrie. 73 einander von Dingen, die in jeder Hinsicht eng zusammengehören. fiür alle Zeit beizubehalten. Die Kugeloberfläche ist keine Korrelation zur Ebene, sondern die Ebene ist ein Spezialtall, also eine Subordination der Kugeloberfläche. Der n:athematische Unterschied zwischen

Kugeloberflache und Ebene ist nicht größer als der mathematische Unterschied zwischen zwei Kugeloberflächen m.it verschiedenem R adius.: 68. Das Paradoxon der scheinbaren Linearität einer Gleichung von Kurven zweiten Grades. In ~ 27 wurde eine Punktkonstruktion auf Grund der Gleichung ' v - 1 angegeben. Es ist interessant, daß diese Gleichung, obwohl sie nur Kurven zweiten Grades enthält, dennoch dem Anscheine nach linear ist. Denn auch die Größe r ist eine in der Figur deutlich algebbare Länge. Das Paradexon klärt sich natürlich dadurch auf, daß d(ie Länge r als 5Wurzel in der Gleichung vorkommt, d. h. als eine Grofße. die trotz ihrer Linearität auf quadratischen Größen beruht. Es kommt uns hier auch weniger darauf an, das Paradoxon als solches festzustellen..als noch einmal die vier Gleichungen zu rekapitulieren, die zusammen die Kegelschnitte erschöpfend wiedergeben. Von diesen vier Gleichungen sind zwei linear gebaut, während die beiden anderen rein quadratisch sind. Die Synmmetrie also ist es, die uns veranlaßt, die formelle Linearität der obengenannten Gleichung zu konstatieren. Und übrigens zeigte der ~ 27 augenfällig, daß zwischen dieser Gleichung und der Gleichung der Geraden ein enger Zusammenhang besteht. Wir zahlen hiermit die vier Gleichungen, welche nach unserer in den vorhergehenden Abschnitten begrindeten Ansicht als die Normalgleichungen der Kegelschnitte zu betrachten gind, auf. Wobei zu bemerken ist, daß eine Normnalgleichung mit einem Maximum von Beziehungsreichtunm ein Minimum von Kompliziertheit vereinigen muß. Die Gleichungen sind: x y r y x r I. + = 1. IT. + -= 1. (bezw. } = 1.) a b a b a b X2 V 2 x2 Y2 I - '. IV. - 1. i b 9- a 2h

74 E rn st B ar thel, ~ 69. Das reziproke Terhältnis zwischen unendlichem Radius und unendlicher Peripherie. Angenommen ein Kreis habe seinen Radius so stark vergiröößert, daß seine Peripherie zur Geraden geworden ist. Dann geht offenbar der Radius 2 in der Peripherie 2 c vier mal auf. Es ist ferner klar, daß jedes Viertel der Peripherie zum Radius gemacht werden kann, bezüglich dessen der frülhere Radius ein Viertel der Peripherie wird. Das Verhältnis zwischen Radius lund Peripherie wird also im unendlichen Bezirk umkehrbar. Jede Länge - kann sowohl als Radils wie als Viertel einer Peripherie aufgefaßt werden. Im endlichen Bezirk gilt bekanntlich ein anderes Gesetz. Hier wird das Verhältnis zwischen Radius und Peripherie durch die Irrationalzahl:r determiniert. Im unendlichen Bezirk ist gleichsam -r -- 2 geworden. Hier läßt sich auch der Radius nicht sechsmal in der Peripherie abtragen, sondern nur viermnal. Hier fällt jeder

Unterschied von Senme und Peripherie fort. Es wäre sehr kurzsichtig, ollte man diese neuen Gesetze des unendlichen Bezirks als Argumente gegen die Polargeometrie ins Feld führen. Main muß inm Gegenteil anerkennen, daß sie auf dem sicheren Fundament der Polargeometrie wie neuentdeckte Tatsachen bewertet werden imssen, die den alten in keiner Weise widersprechen, weil sie auf einem ganz neuen Gebiet liegen. In dem Augenblick, wo der Unterschied zwischen Peripherie, Tangente und Sehne eines Kreises gleich null wird, ändern sich plötzlich in gesetzmäßiger Weise alle Beziehungen, welche die Elementargeometrie auf Grund der ausdrücklichen Verschiedenheit dieser drei Linien abgeleitet hat. Also vor allem. aändert sich die Zahl.-. Das reziproke Verhältnis zwischen Radius und Peripherie ist eine der bewundernswertesten Vollkommenheiten der Geometrie des Unendlichen. Wenn man beachtet, daß dadurch zwischen Radius und Peripherie eine umkehrbare Polarität festgesetzt wird, kann man ihre Übereinstimmung mit denm Grundgesetz aller Naturlogik nicht in Zweifel ziehen.

Page 75

Polargeometrie. T5 B. Stereometrischer Teil. ~ 70. Kegel und Zylinder. Da sich je zwei Geraden, welche sich in einem Punkte schIneiden., auch in einem zweiten Punkte schneiden, der voml erster(e d(ie Ettfernung x besitzt, besteht für einen Kegel in seinem Verlauf dulrch tda Unendliche folgendes Gesetz. Seine Seitenlinien divergieren voml Scheitel bis zur Entfernung 2.)ort sind sie parallel, d. h. dort ist der Kegel ein Zylinder. Von hier ab konvergieren die Seitlnlliiet wieder, bis sie nach abermals 2 sich in einem zweiten Scheitel scheliden. Vom zweiten Scheitel geht es in derselben Richtung und nach 'denmselben Gesetze wieder zum ersten Scheitel zurück. Jeder Kegel bildet demnach einen Kreislauf im.it zwei Scheiteln und zwei Zyliniderphasen. Er läuft in sich selbst zuriick, was ibrigens schlln durfh die bereits erörtertecn Eigenschaften der Kegelsciititte vollki\oimmtlln.ausgeiilmacht ist.)(i Gegensatz von Kcgel und Zylinder ist wie der Gegcnsa:tz paralleler und nichtparalleler Geradei, einer Ebene bloß graduell. nicht wesentlich. Ein Zylinder ist ein Kegel, dessen Scheitel in der Entfernulg 2 liegt. Jeder Kegel wird in der Entfernliung 2 vou seinemn Scheitel zum Zylinder, und jeder Zylinder hat in der Erntfernunlg 9 von seiner geiat(en Parallelitätsstelle eilnn ScheiteL, Kegel und Zylinder sind nicht verschiedene Körper, sondern vrschiedene Phasen ein und desselben Körpers in seinem Verlaif d(urch das -Tnendliche.:Nur der Standpunkt des Beobachters entscheidet. ob ein Körper Kegel oder Zylinder genannt werden soll. Berücksichtigt man den Totalverlauf dieses Körpers durch das lnecndliche, so ist ci zwetnial ein Zylinder und zweimal ein Kegel miit sichtbarer Spitze. Zwischen diesen vier Hauptstellen ist der Körper ein Kegel olne sichtbare Spitze, d. h. ein Kegelstumpf. Der])urchmesser des Zylinders steht mit dem Winkel des ihm entsprechenden Kegels in dei durch ~ 12 und ~ 47 begründeten Bed w ziehung: ^ -- i80. Diese Gleichung gilt übrigens, wie hier nachgetragen sei, für das Verhältnis von Abstand unod Winkel z:eier

t76 El rni s t B a rtl el, Geraden einer Ebene ganz allgemein. Ist der Abstand zweier Parallelen bekannt, so ist die Größe ihres Sclmittwinkels durch obige Gleichung fest bestimmt. Ist umgekehrt der Schnittwinkel zweier Geraden bekiant, so findet man durch obige Gleichung den Abstand der Geraden an ihrer Parallelitätsstelle. Vergrößert sich der Abstand zweier parallelen Geraden, so äindert sich die Lage ihrer Schnittpunkte nicht, wohl aber ändert sich ihr Schnittwinkel. Der Abstand der Schnittpunkte zweier Geraden ist ja in keiner Weise willküiirlich beeinflußbar. sondern beträgt stets die Nattrkonstante.c Diese Angaben mögen an dieser Stelle als Rekapittlation nüitzlich sein. Denn es ist dringend nötig, daß man sich das Grundgesetz der Polargeometrie nach allen Seiten so deutlich macht, daß es jedem ieser -in seiner ganzen Klarheit stets gegenwärtig sei. ~ 71. Die Zylinderschnitte. Es folgt aus dem Vorhergehendeln, daß Zylinderschnitte nichts anderes sind als Kegelschnitte, die man von einem um vo t Scheitel entfernten Standpunkt betrachtet. Der interessanteste Zviinderschnitt ist die bisher noch nicht beachtetet Parallelhvperhel. x2 v2 Sie hat die Ghleichung (-) --- i 1. Mant erhilt sie ausI der 2 b2 gewiihnlichen Hyperbel 1 indelm man unter Beibehaltnmg eines Hyperbelpoles und der zugehörigen Scheiteltangent.en b dena Nullpunkt des Achsensystems in die Entfernung schwinden lä.ßt. Die Äste der so entstehenden Hyperbel sind einander im Punkte der Betrachtung parallel. ~ 72. Das räumliche Strahlenbüschel. Man nehme im Raum einen Punkt P an und lege durch ihn ein vollstanciges Strahlenbüschel. Jie Strahlen dieses Büschels divergieren dann, wie nachgewiesen, bis zur Entfernung 2 von P. Dort sind sie parallel. Von da ab konvergieren sie wieder und bilden in (der Entfernung cr von P einen zweiten Schnittpunkt P'. Von P'

Polargeometrie. 77 geht es in gleicher Richtung geradlinig wieder nach P zurück, und zwar auch diesmal über eine

ParaUelitätsstelle der Strahlen. Auch das Strahlenbüschel durchläuft also die Unendlichkeit in vier Quadranten. Wie die Ebene, so ist auch der Raum allseitig in sich selbst geschlossen. Man kann natürlich nicht aus dem Raun nach irgend einer Seite entweichen. Diese Vorstellung wäre völlig unzutreffend. Denn dei Raum gestattet innerhalb seiner nach allen Richtungen eine ungehinderte, schrankenlose, geradlinige Bewegung, was ja am besten durch den Begriff des Strahlenbitschels selbst erläutert wird. Der Raumn läuft geradlinig in sich selbst zurück, ist aber in keiner Weise begrenzt. Anl der Stelle, an welcher das Büschel parallele Strahlen hat. leterminiert es in beiden Malen eine Ebenenhälfte, welche beiden Ebenenhalften sich zu einer Totalebene zusammenschließen. Jeder durch einen Scheitelpunkt P gesetzte Raunm determiniiert also sowohl einen Gegenscheitel P' als auch eine Totalebene, welche den Raum als Äquatorebene durchschneidet. Und jede Totalebene determiniert nach denlselben Gesetz zu ihren beiden Seiten je einen Pol, welcher dlen Raum, zu welchem die Totalebene äquatorial verläuft. eindeutig f estsetzt. ~ 73. Der Begriff des Raumes. Wie schon in ~ 26 zum Ausdruck gebracht wurde, ist der Ratum der Polargeometrie nicht amorph wie derjenige der euklidischen Geometrie, sondern er hat eine kristallographische Struktur. Man kaann ihn daher nicht nur in seinen Gesetzen bis ins E Einzelne analysieren, sondern man kann ihn auch mit vorteilhafter Exaktheit klar definieren. Ein Raum ist nach der Polargeometrie ein dreidinensionales (vgl. ~ 11 Def. III und VII) Ordnungsprinzip, das durch einen Polpunkt P genauestens angegeben ist. Durch P ist ganz von selbst auch P' und die Äquatorebene determiniert. Ein Raum ist fest, wenn der Punkt P fest ist. Ein Raum ist bewegt, wenn der Punkt P bewegt ist. Der Ranum steht also in der Polargeometrie nicht mehr außerhalb aller Gepflogenheiten der übrigen geometrischen Gebilde, sondern er ist genau wie Gerade und Ebene entweder fest oder bewegt. Diese Einordnung des Raumes in die geometrische Sitte dürfte ein beachtenswerter methodischer Vorzug der Polargeometrie sein.

Ernst Barthel, ~ 74. Ein Gesetz der Raumbewegung. Bewegt sich ein Ratum mit den Polen P iind P' auf einer Geraden g, so dreht sich seine lquaitorebene um. eine Achse. Und zwar ist diese Achse der Ebenenäquator zwischen denjenigen beiden Punkten, in denen die Gerade g die Äquatorebene in einer beliebigen Anfangsstelllug schneidet. Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Überlegung. daß die Distanz zwischen Pol und Äquatorgebilde stets - beträgt and daß die

Äquatorebene irmmer auf der parallelen Region des Raumbiischels senkrecht steht. Es ist von Interesse, sich hier zu erinnern, daß die projektive Gxeometrie der Ebene einen ähnlichen, ebenso eleganten Satz enthält. Er gehört der Lehre von der Kreispolarität an und lautet: Bewegt sich ein Punkt P auf einer Geraden g, so (deht sich seine Polare umn;1ineln Punkt. welcher der Pol dieser Geraden ist. ~ 75. Die Zwillingsgeraden. Man nehme eine Ebene, deren beide Pole und die zt diesen Polen gehörige Aquatorgerade. 1)ann sind nach ~ 32 die Pole die Mittelpunkte der Äquatorgeraden auf der Ebene. Man drehe nun die Ebene um die Äquatorgerade. Dann bewegen sich die beiden Pole auf einer Geraden, welche auf der Ursprungsstellung der Ebene senkrecht steht, durch den Raum. Die letztere Gerade enthält also,lauter M{ittelpunkte der ersteren, nämlich für jede durch die erstere gelegte Ebene ein Paar. Der Kürze wegen heiße die erste Gerade gl, die zweite g 2. Dann ist jeder Ptnkt von g2 Mittelpankt von gl1 Es ist aber auch jeder Punkt von gl Mittelpunkt von g2. Es gibt also in einem Raram zu jeder Geraden eine zugeordnete Gerade derart, daß jeder Punkt jeder von beiden Geraden Mittelpunkt der anderen Geraden ist. Jeder Punkt jeder der beiden Geraden hat von jedem Punkt der anderen Geraden den Abstand 2 Solche Geraden eines Raumes, welche diese gegenseitigen Eigenschaften besitzen, nenne ich Zwillingsgeraden. Zu jeder Geraden eines Raumes existiert in demselben Raum eine und nur eine Zwillingsgerade. Die Amtlichen Punkte der beiden Geraden haben voneinander

Polargeometrie. 79 of lden Abstand des Naturmaiximums9. Der Beweis dafür ergibt sich tus obiger Ableitung. Zwillingsgeraden sind die einzigen überhaupt existierenden Geraden, welche konstanten Abstand voneinander haben. Sie stellen gleichsam eine späte Erfüllung dessen dar, was man in unmöglicher Weise von den Parallelen glaubte hoffen zu sollen. Geraden derselben Ebene können nicht konstanten Abstand voneinander halten. Geralden eines Raumnes können dies in dem einen, ausnahmsweisen Falle, daß der konstante. Abstand 9 betragen soll. Dann sind es Zwillingsgeraden. ~ 76. Windschiefe Geraden eines Raumes. Legt man irgend zwei Geraden in einen Raum, so werden sie in der Regel weder ein und derselben Ebene angehören, noch werden sie Zwillingsgeraden sein. Sondern der reguläre Fall ist der, wo die Geraden, wie man sich in der Stereometrie ausdrückt, windschief verlaufen. Um zu erkennen, was diese Bezeichnung besagt, wolle man zwei geradlinige Stäbe in unregelmäßiger Weise in den Raum halten und ihr gegenseitiges Verhältnis beachten. Windschiefe

Geraden schneiden sich überhaupt nicht. Sie werden durch folgende Definition bestimmt: Windschiefe Geraden sind solche Geraden eines Raiimes, bei denen die Verbindungsgeraden je zweier nebeneinanderliegender Punkte ungleiche Länge haben, ohne daß die Geraden derselben Ebene angehören. Oder eine andere Definition: Windschiefe Geraden sind Geraden, die weder in derselben Ebene verlaufen, noch Zwillingsgeraden sind. Jedes Paar windschiefer Geraden hat zwei Stellen der Maximalentfernung und zwei Stellen der Minimalentfernung. Diese vier Stellen liegen jeweils2 auseinander, und zwar so, daß Maximal- und Minimalentfernung abwechseln. Sind zwei windschiefe Geraden im Raumn wirklich gegeben, so überblickt man gewöhnlich eine Minimalstelle, von welcher auls die Abstände nebeneinanderliegender Punkte immer größer werden. Dies kann man sich an den beiden ebengenannten Stäben klar machen. Wenn im planimetrischen Teil gelegentlich der Parallelendiskussion hie und da gesagt wurde, daß es nichtschneidende Geraden

80 El rnst Barthel, überhaupt nicht gebe, so bezog sich natürlich diese Feststellung nur auf die Ebene. Im Raume gibt es nichtschneidende Geraden in größter Anzahl, nämlich sowohl die Zwillingsgeraden als die windschiefen Geraden. Man kann geradezu einen grundsätzlichen Gegensatz zwischen Raumgeraden und Ebenengeraden konstatieren, indem man das Gesetz beachtet: Raumgeraden schneiden sich niemals, Ebenengeraden schneiden sich immer. Dieser schöne Gegensatz konnte in der euklidischen Geometrie noch nicht bemerkt werden, da die euklidische Geometrie irrtnmlicherweise auch in der Ebene nichtschneidende Geraden annimmt. Demgegenüber setzt die Polargeometrie den klaren Gegensatz zwischen Planimetrie und Stereometrie. Nichtschneidende Geraden sind nach ihr nur in der Stereometrie miglich. ~ 77. Die Schnittlinie zweier Ebenen. Wenn zwei Geraden sich niemals schneiden, so sind es Raumlgeraden, d. h. ihr gegenseitiges Verhältnis ist nur durch drei Dimensionen ausdrückbar. Wenn zwei Geraden sich aber schneiden, so sind es Ebenengeraden, c. h. ihr gegenseitiges Verhältnis ist durch zwei Dimensionen ausdriickbar. Der Schnittpunkt zweier Geraden ist also gleichsam der Ersatz für eine Dimension. Dieses interessante Gesetz ist wieder nur auf Grund der objektiven Geometrie möglich, während die euklidische Geometrie in dieser Hinsicht vollkonmen chaotisch erscheint. Da Gerade, Ebene und Raum in der Polargeometrie eine Trias bilden, die sich durchaus analog verhält, läßt' sich von den Schnittverhältnissen zweier Geraden auch auf die

Schnittverhältnisse zweier Ebenen ein Schluß ziehen. Zwei Ebenen desselben Raumes schneiden sich stets in einer Totalgeraden, die in Analogie zu den beiden Geradenschnittpunkten bekanntlich aus zwei logisch selbständigen Hälften besteht. Zwei Ebenen dagegen, die nicht demselben Raum angehören, schneiden sich nach Analogie der Raumgeraden iberhaupt nicht. ~ 78. Die Mehrzahl der Räume. Da es nach ~ 73 einen bewegten Raum gibt, gibt es auch mehrere Räume. Denn wie jede sich bewegende Ebene mehrere Ebenen erzeugt, so erzeugt ein sich bewegender Raum mehrere Räume. Es

Polargeometrie. 81 gibt also beliebig viele Räume, wie es beliebig viele Ebenen, Geraden und Punkte gibt. Jeder Punkt P, den man annimmt, bestimmt ja nach ~ 73 einen Raum. Da nach ~ 77 Ebenen verschiedener Räume keine Gerade gemeinsam haben, so haben auch die Räume selbst keine Gerade, geschweige denn eine Ebene, gemeinsam. Zwei Räume schneiden sich also überhaupt niemals. Sie sind gegeneinander völlig transzendent, schließen einander absolut aus. Dies läßt sich natürlich nicht durch die Vorstellung begreifen, sondern durch den logischen Verstand. Ein Hilfsmittel, um den Raum in endlicher Form darzustellen und also auf Wunsch auch mehrere Räume mathematisch abzubilden, wird in einem der folgenden Paragraphen angegeben werden. (~ 81.) Unter allen Räumen, die man neben einem Raum mit den Polen P und P' sich denken kann, ist einer vor allen andern besonders ausgezeichnet. Es ist der Raum mit den Polen P' und P, d. h. der Konträrraum des ursprünglichen, in welchem die Pole umgekehrt sind. Dieser Konträrraum hat u. a. auch eine interessante algebraische Bedeutung, die nunmehr dargestellt sei. ~ 79. Die Logarithmen negativer Zahlen. Schon einige Jahrhunderte lang hat man die Frage aufgeworfen, ob es Logarithmen, negativer Zahlen gibt. Z. B. enthält derselbe Band des Leipziger Magazins von 1786, der Lamberts berühmte Untersuchung über die Parallelen bietet, auch eine längere Abhandlung über dieses Problem. Nun ist darüber zweierlei ganz klar: 1. Daß der bisher bekannt gewesene Zahlenkosmos kein Hilfsmittel enthält, um die Logarithmen negativer Zahlen auszudrücken. Denn weder positive noch negative, weder reelle noch imaginäre Zahlen noch irgend eine andere bekannte Zahlenart wäre imstande, die Größe x der Gleichung gX = -a auszudrücken. 2. Daß die Mathematik selbstverständlich Mittel und Wege finden muß, um auf eine so klare, einfache Frage den befriedigenden Aufschluß nicht schuldig bleiben zu müssen. Die Lösung des alten Problems ist unmöglich, so lange man sich auf dem Standpunkt der Singularität des Raumes befindet. Wenn nur ein einziger Raum logisch denkbar ist, oder wenn nur solche Räume logisch denkbar sind, die miteinander irgend etwas gemein haben, 6

82 Ernst Barthel, so ist für Logarithmen itegativer Größen kein Rat zulschaffen. Wenn man jedoch auf dem soeben entwickelten Standpunkt der Polargeometrie steht, daß Raum und Kontrarraum möglich sind, die miteinander nicht die leiseste logische Gemeinschaft besitzen, so fällt einem die Lösung betreffs der Logarithmen negativer Größen mühelos zu. Während der ursprüngliche Raum mit den Polen P und P' die Logarithmen positiver Größen enthält, ist der Konträrraum mit den Polen P' und P der Ort der Logarithmen negativer Größen. Beide Räume sind grundsätzlich gleichberechtigt. Sie stellen gleichsam verschiedene mathematische Zustande dar, die einander ebenso fremd gegenüberstehen wie in'der metaphysischen Welt die Zustände Leben und Tod. Raum und Konträrraum sind auf zwei verschiedene Nullpunkte bezogen, im übrigen aber von genau der gleichen Struktur. ~ 80. Die-Dimensionenzahl des Raumes. Die Mathematik in ihrer Ausbildung durch Gaulß und Riemann spricht von möglichen Räumen mit mehr als drei Dimensionen. Sie halt den Erfahrungsraum nur für einen einzigen der möglichen Räume und findet in der Annahme mehrdimensionaler Räuiie keine Schwierigkeit. Wie sehr auch anzuerkeanen ist, daß die Auswertbarkeit dieses Standpunktes in logischer und algebraischet Hinsicht viel Interesse hat, so muß doch betont werden, daß er für die Polargeometrie gar nicht in Bettacht kommt. Denn die Polargeometrie ist ausdrücklich als empirisch fundierte Wissenschaft definiert worden. Sie betrachtet die Erfahrungswirklichkeit nicht als Spezialfall der wissenschaftlich möglichen Fälle, sondern vielmehr als die einzig haltbare Grundlage aller Wissenschaft, die sich mit Erfahrungsgrößen abgibt. Nun unterliegt es aber keinem Zweifel, daß eine Wissenschaft, welche von "Dimensionen" im geometrischen Sinne redet, über Erfahrung spricht, sich also auch an Erfahrung zu halten hat. Entweder ist die Annahme mehrdimensionaler Räume irgendwie berechtigt - dann gehört sie nicht in das Gebiet, welches wir als Geometrie bezeichnen. Oder aber sie behauptet sich ausdrücklich ~als geometrischen Charakters - dann muß die objektive Geometrie sie als Phantasiegebilde beurteilen.

Polargeometrie. 83 Für die Polargeonmetrie, welche auf dreizehn kleae Definitionen gegründet ist, ist die Dreidimensionalität des Raumes da$ eigentliche Wesensmerkmal des Raumes. Es. läßt sich beweisen, daß etwa die Definition: ~Der Raum ist ein vierditmensionales Ordnuhg3gebilde" mit den vorhergehenden Definitionen ~ 11 im Widerspruch stände. Dieser Beweis geschieht in folgender Weise: Nach Definition.II geht der. rechteWinkel im Vollwinkel viermal auf.:Eine Dimension ist.aber durch Definition III auf Grund dieses Gesetzes der Erfahrung definiert. Folglich ist es gar nicht möglich, logischerweise von mehr als dreidimensionalen geometrischen Gebilden zu- sprechen. Für die reine Logik, deren Wert dementsprechend gering ist, mag. die Erfahrungswelt immerhim als eine von vielen: möglichen Welten gelten. Für die Erfahrungawissenschaft, also auch für:die Polargeomet.rie,ist nicht, die bloße Logik, sondern die Erfahrung zuprema lex. Wo -k.äme eine Erfahrungswissenschaft hin, wenn sie neben den Aussagen der Empirie noch sämtliche Möglichkeiten des formalen -Verstandes aufnehmen müßte! Darin besteht gerade die Überlegenheit der Erfahrung über den Verstand, daß der Verstand mit ~allem Möglichen".zufrieden ist, während die Erfahrung aus,allem.Möglichen' nur eine ganz bestimmte Sache als zutreffend und wahr- gelten läßt. ~ 81. Diel Reversionskugel 'als mathematisches Modell des Raumes. Wä.re die Kugeloberfläche das einzige Hilfsmittel, um die' unendliche Ebente in endlicher Form mathematisch getreu darzustellen, so köinnte a priori gesagt werden, daß ein ähnliches Darstellungsmittel für den'Raum nicht existiert. Denn die Kugeloberfläche braucht schon eine dreidimensionale Wirklichkeit, welche nicht nooch durch eine Dimension vermehrt werden kann. Nim' ist' aber die unendliche Ebene ebenso gut durch die Lambertsche Müinze darstellbar, welche zweidimensional ist. Es ist also nicht ausgeschlossen, daß 'für den Raum eine ebenso brauchbare dreidimensionale mathematische Vereridlichung gefunden werden kann. Diese dreidimensionale' Darstellung des dreidniensinalen unendlichen Raumes in endlicher Form ist die Reversionskugel. Sie hat folgende Struktur. 6*

84 Ernst Barthel, Es sei eine Lambertsche Münze mit Meridianen und Breitenkreisen gegeben. Dann ist jeder Punkt der Ebene auf der Münze durch zwei Koordinaten, nämlich Länge und Breite, eindeutig bestimmt. Man mache nun diese

Münze zur Äquatorfläche einer KugeL. Dann ist jeder Punkt des Kugelraumes durch dre; Koordinaten, nämlich Länge, Breite und Höhe, eindeutig bestimmt. Die Lambertsche 'Münze hat nach ~ 56 zwei Stellungen A und B. Dementsprechend hat auch diese Kugel zwei Stellungen I und II.. Die Umkehrbarkeit der Kugel zwischen den beiden Stellungen ist ihre wichtigste Eigenschaft. Dadurch wird ermöglicht, daß jede der beiden Kugelhälften sowohl iber als unter die Äquatorebene zu liegen kommen kann. Die Äquatorfläche verlaufe stets horizontal. Die Reversionskugel ermöglicht es, die Bewegung eines Punktesdurch den unendlichen Ratmr bis zum Ausgangspunkte zurück zu. verfolgen. Wesentlich ist, daß man nicht annehme, die obere Kugelhälfte gehöre zur Stellung A, die untere Kugelhälfte zur Stellung B der Münze. Sondern man wolle ausdrücklich sein Augenmerk darauf richten, daß jede Kugelhälfte zwei Funktionen ausüben kann, sei es als obere Kugelhälfte der Münzenstellung A (bzw. B) oder als untere Kugelhälfte der Münzenstellung B (bzw. A). Diese Doppelfunktion der beiden Kuelhälften ermöglicht gerade die Darstellung des unendlichen Raumes in endlicher Form. Damit nicht zu Unrecht die Vermutung entstehe, es handele sich hierbei um komplizierte Dinge, wäre es gut, wenn der geneigte Leser sich in den Besitz einer in der Mitte gespaltenen, aber zusammenschraubbaren Hohlkugel aus Glas setzen könnte. An diesem. Modell läßt sich ganz einfach zeigen, was in Worten nur umständlich gesagt werden kann. In dem Modell wird man auch die Koordinaten verschiedener Punkte anschaulich machen können, indem man eine Äquatorebene aus Papier quer durch die Kugel spannt und auf dieser durch Zeichnung Länge und Breite der Punkte angibt, während man die Höhe durch Fäden markieren kann. Jeder Punkt des unendlichen Raumes hat in der Reversionskugel seine exakte Entsprechung, und es wäre wünschenswert, daß man hiervon eine recht konkrete Anschauung gewänne.

Polargeometrie. 85 ~ 82. Die geradlinige Bewegung eines Punktes durch den Raum, ohne Modell angegeben. Gegeben sei ein Raui mit den Polen P und P' und seiner Äquatorebene. Ein Punkt habe seine Anfangsstellung an einem bestimmten Ort 0 der Äquatorebene. Er bewege sich von da aus senkrecht zu der Ebene in Richtung des Poles P in den Raum hinaus. Nach einer Entfernung von ~ wird er den ersten„merkwürdigen Punkt" seiner Reise, nämlich den Pol P, passieren. Von diesem aus nähert er sich wieder der Äquatorebene, aber in Richtung auf den Gegenpunkt von 0, der 0' heiße. Nach der Entfernung o vom Ausgangsort erreicht er diesen Gegenpunkt. Von da ab entfernt er sich wieder von der Ebene, und zwar diesmal gegen den andern Pol P'. Diesen erreicht er nach einem Gesamtwege von / oo. Bewegt er sich in deiselben Richtung noch um die Strecke2 weiter, so gelangt er an seinen Ausgangspunkt 0 zurack. Auf diese Weise hat sich der Punkt geradlinig durch die vier Quadranten des Totalraumes bewegt. Kein Raum ist anders organisiert, als daß er einem Punkt, der sich geradlinig in ihm fortbewegt, diese Rückkehr zum Ausgangspunkt gestattet. Auch der Raum stellt einen ~Kreislaiuf dar. (Vgl. ~ 40.) ~ 83. Dieselbe Bewegung des Punktes im Moäell demonstriert. Gegeben sei eine Rcversionskugel in Stellung I. Der Pol P liege oben, und der Punkt beginne seinen Weg in einem Orte 0 der oberen Münzenfläche. Er bewegt sich bis P auf dem Ast der Ellipse, die durch den Kugelradius und die Breite des Punktes 0 determiniert ist. Ist der Punkt in P angelangt, so geschieht die erste Reversion des Modells, wodurch es in Stellung II übergeht. Der Punkt bewegt sich vom obersten Pole dieser Stellung, welche jetzt den Namen P trägt, auf einem ebensolchen Ellipsenaste wieder abwärts, und zwar nach derjenigen Richtung, in welcher er den Gegenpunkt von 0, namens 0' erreicht. Er bewegt sich von hier noch weiter nach unten bis ztum Pol P'. Nun geschieht die zweite Reversion des Modells, durch welche es in Stellung I zurückkehrt. Der unterste Pol behält den INamen, P,

86d~ ~ Ernst Barthel, Von hier aus bewegt sich der PInkt auf dem zugehörigen. Ellipsenaste nach oben bis zum Ausgangspunkt 0 zurück. Die beiden Reversionen des Modells rit zugehörigem NIamenswechsel der realen Punkte sind das Hilfsmittel, durch welches die Unendlichkeit des Raumes mathematisch brauchbar dargestellt werden kann. ~ 84. Angabe der drei Raumkoordinaten eines Punkten im 5Modell. Es:fällt auf, daß im. vorhergehenden Paragraphen von einer ellipsenförmigen Bewegung des Punktes die Rede ist, während in Wirklichkeit die Bewegung durch dep *Raum geradlinig erfolgen. soll. Die Einführung der Krümmung ist eine unvermeidliche. Folge der endlichen Darstellung. Die Höhe eines Punktes, d. h. seine senkrechte Erhebung über der Äquatorebene, kann im. Modell nicht geradlinig dargestellt werden, da Geraden, die auf der Müiinze senkrecht stehen, in der Regel niemals durch die beiden Pole gehen und außerdem die Wände des Modells durchbrechen würden. Deshalb sind die Höhenlinien im Modell keine Geraden, sondern Ellipsenäste, welche sich von der Äquatorebene bis zu den Polen erstrecken. Dadurch wird gewährleistet, daß jeder Raumpunkt d.e unendlichen Raumes innerhalb des Modells eine bestimmte

Entsprechung erhält. Wir stellen nun. statt weiterer Ausführungen einen Rai mpunkt von gegebenen Koordinaten im Modell genau dar. Es sei zu konstruieren der Raiumnpunkt von der Länge 30 Grad positiv, der Breite 40 Grad negativ und der Höhe 50 Grad positiv. Mlan verfahrt. wie folgt: Längenmeridiane und Breitenkreise bestimm..en auf der Lambertschen Müinze ohne weiteres den Punkt, über welchent der gesuchte Raumpunkt in Wirklichkeit senkrecht steht. Es handelt sich, da die Breite negativ ist, um Stellung B. Der Punkt auf der Münze determiniert nun mit dem Pol P zusammen einen Ellipsenast, dessen große Achse der Kugelradius ist. Das Höhenniveau von 50 Grad wird auf der Mittelachse des Modells bestimmt, wobei der KugelradiUs gleich 90 Grad gesetzt wird.' Die Horizontalebene, Welche das Hihenniveau angibt, schneidet den soeben konstruierten Ellipsenast in demn gesuchten Raumpunkte. Dessen Längo beträgt 30 'Grad positiv seine Breite 40 Grad negativ ande seine Höhe 50 Grad positiv.

Page 87

Polargeometrie. 87 Es empfiehlt sich, im gläsernen Modell die Höhenellipsen durch steife Fäden anschaulich zu machen, die -entsprechend gebogen sind. Da kein Raum Punkte haben kann, welche nicht zwischen 90 Grad positiver und negativer Länge, 90 Grad positiver und negativer Breite sowie 90 Grad positiver und negativer Höhe liegen, ist es in der Tat möglich, auf diese Weise jeden noch so abgelegenen Punkt eines Raumes exakt im Modell zu konstruieren. ~ 85. Eigenart des Raumkörpers. Es ist wünschenswert, sich von der Eigenart der Raumstruktur einen möglichst vielseitigen Begriff zu bilden. Zu diesem Zwecke läßt sich der Raum noch auf eine andere, recht konkrete Art zur Darstellung bringen. Man nehme zwei Kugeln von gleichem Radius und bringe ihre Oberflächen in einem Punkte zur Beriihrung. eyze b-,ene Fig. 23. Nun denke man sich ihren Radius immer stärker vergrößert. Dann wird der Unterschied zwischen den Krünmmungen langsam geringer werden. Die beiden Kugeloberflächen nähern sich in jedem bestimmten Punkte bei der Berührungsstelle einander gegenseitig. Wenn nun der unvermeidliche Grenzfall angenommen wird, daß die beiden Kugeloberflächen vollkommen ungekrümmt, also eine einzige Totalebene sind, so berühren sie sich nicht mehr bloß in einem Punkte, sondern auf ihrer gesamten Fläche. In diesem Falle haben die beiden Kugeln alle Endlichkeit verloren und stellen in ihrer Vereinigung

Page 88

1S8 Ernst Barthel, einen Raum dar, d. h. die dreidimensionale Unendlichkeit mit ihren beiden Polen, den ehemaligen Kugelmittelpunkten, und ihrer Totalebene, der ehemals doppelten Kugeloberfläche. Der Raum ist also der unendliche Grenzwert einer sich berührenden Doppelkugel. Er hat keine Schranke, sondern ist allseitig unendlich. Seine einzigen Strukturbestimmtheiten sind die Äquatorebene und die beiden Pole, welche von der letzteren einen Abstand von je 2 besitzen. ~ 86. Die Zeit als Grundbegriff der Polargeometrie. Die Gegenstände der Polargeometrie sind nicht als ruhende Bilder vorstellbar, sofern sie unendlich sind. Denn das menschliche Bewußtsein ist nicht dazu geschaffen, das Unendliche als Bild anschauen zu können. Trotzdem ist aber die Polargeometrie durchweg konkret, bestimmt, klar und empirisch begründet. Dies geschieht durch Einführung zeitlicher Prozesse. Die Polargeometrie legt zwar nicht Gerade, Ebene und RIunm in ihrer Totalität jedermann vor Augen. Sie gibt aber Anweisung, diese Prinzipien als Grenzwerte eines in seinem Verlauf durchalus anschaulichen Prozesses zu betrachten. Die unendlichen Gebilde der objektiven Geometrie sind Ideen im Kantis-hen Sinne, d. h. sie stehen am äußersten Ende eines Erfahrungsprozesses, und bilden dessen unvermeidlichen Schlußstein. Die Zeit gehört somit zu den Grundbegriffen der Polargeometrie. Die Geometrie hat in moderner Zeit immer mehr ihre euklidische Starrheit verloren. Sie hat in reichem Maße den Begriff der Bewegung aufgenommen. Sie spricht seit Desargues von bewegten Punkten, Geraden und Ebenen. Indem die Polargeometrie diese moderne Tendenz der Geometrie noch verstärkt, geht sie mit der Entwicklung konform. Der realste der Erfahrungsbegriffe, die Zeit, soll keineswegt aus der Geometrie eliminiert werden, sondern soll die, Gewähr für die Objektivität des Systems noch erhöhen. In der Geometrie muß anstelle der euklidischen Starrheit der Begriffe ein lebendiges,Panta rhei" von Bewegungen und Evolutionen treten. Sie muß gegen zwei Fronten einen besseren Standpunkt vertreten. Einerseits wendet sie sich gegen die Forderung ruhender Anschaulichkeit für solche Dinge, die ihrem Wesen nach nicht auf diese

Page 89

Polargeometrie. 89 Weise angeschaut werden können. Anderseits bekämpft sie aber auch den unempirischen Standpunkt des Logismus, der die Anschaunug überhaupt zu mißachten geneigt ist. Gegenibber diesen beiden Standpunkten vertritt die Polargeometrie den dritten, daß die cmpirische Anschauung das einzig wertvolle Fundament der. Gaometrie ist, daß aber die unendlichen Größen, also Garade, Ebene und R num, nicht als unmittelbare Erfahrung dargeboten werden können, sondern bloß als Ideen im Kantischen Sinne, welche am äußersten Ende einer anschaulichen Erfahrunggreihe stehen. Die Polargeometrie beruht ganz und gar auf Erfahrung. Es liegt aber in der Natur der Dinge, daß diese Erfahrung unter Umständen nur mittelbar, daram aber doch nicht weniger sicher ist. Da wir Stücke von Geraden oder Ebenen aus der Erfahrung kennen, auch den Übergang zwischen gekrümmten und ungekriimmten Gebilden aus der Erfahrung kennen, ist es ih der Tat eine sehr billige und leicht erfüllbare Forderung, sich die Totalität einer Geraden oder Ebenen als Kantische Idee zu denken. ~ 87. Die tiefere Ursache der Uhvorstellbarkeit der unendlichen Totalität. Es ist dem Verfasser wohlbekannt, daß seine Theorie des in sich geschlossenen Raumes, der in sich geschlossenen Ebene und der in sich geschlossenen Geraden bei den meisten Mans=hen notwendig auf ein großes Hindernis stößt, das sich daraus ergibt, daß diese Dingo tatsächlich nicht vorgestellt werden können, wenn mnr. unter Vorstellung eine ruhende bildliche Ansicht der ganzen Sache versteht. Wenn man sich eine Linie als in sich geschlossen vorstellen soll, so muß mtan sie s'ch auch gekrümmt vorstellen. Der Hauptgedanke dieses Buches ist aber gerade der, daß die Ebene, der Rium und die Gerade ungekrümmt in sich selbst zurücklaufen. Diese scharfe Unterscheidung der Begriffe ~gekrümmt" und "geschlossen' ist unsermn Buche wesentlich, und die Erkenntnis, daß eine Linie oder Fläche geschlosseI sein könne, ohne gekrümmt zu sein, ist wohl eine der Fundamentalerkenntnisse der Geometrie. Da die Insichgeschlossenheit einer ungekrümimten Linie oder Fläche nur logisch bewiesen, aber nicht angeschaut werden kanna ist es wünschenswert, sich davon Rechenschaft zu gaben, in welcher Weise diese scheinbare Unzulänglichkeit der menschlichen Anschauung

90 Ernst Bart hel, mit dem Wesen des' Bewußtseins unzertrennlich verbundei ist. Ich möchte diesen etwas tief liegenden Punkt populär faßbar machen. Jedermaen kann leicht die Wichtigste:Wahrheit der Philosophie einsehen, nämlich, daß alle Dinge in der Welt polar geordnet sind. Nicht nur führt:die Polargeometrie dieses Prinzip der objektiv herrschenden Polarität:zu seinem höchsten Triumph, sondern die Natur selbst zeigt. uns die Polarität am Unterschied der Geschlechter. Ein menschliches Bewilßtsein ist -schon nach Plato -iimmer nur die Hälfte einer Ganzheit, Und es kann also auch nur die Hälfte der Unendlichkeit vorstellen. Nehmen wir zwei Bewußtseine, so können sie die: ganze Unendlichkeit

umfassen, nämrlich jedes eine Hälfte. Ein einzelner Menisch aberkann ebenso wenig die in sich geschlossene Unendlichkeit vorstellen wie ein Kind erzeugen. Denn jedes mnenschliche Bewu ßtsein ist nur eine' Hälfte, deren Ergänzung gesuch; werden müß. Der Verfasser hofft, daß der philosophische Leser von hier aus die logische Zweiteilung der Ebene und die beiden Seiten der Lamnbertschen lMinze in einem neuen Lichte gewahren wird. ~ 88, Logik, Ethik und Geometrie als die apriorischen Wissenschaf ten. Seit ~dem 18. Jahrhundert ist es allgemein gebräuchlich geworden, die Wissenschaften der Logik, Ethik und Ästhetik als die drei apriorischen Wissenschaften zu betrachten. Das,;Wahre, Gute und Schöne" wurde zur stehenden Gedankenverbindung der nachkalitischen Philosophie. Apriorisch heitt, auf Begriffen luhend, die ~das Bewu'tsei;n 'nicht aus der Erfahrung entnimmt, sondern auf Grund deren es Erfahrungen erst möglich macht. Solche Begriffe sind z. B. wahr, falsch, gut, böse. Nun ist es aber von vornherein sicher, daß dem Gegensatz schön: häßlich nicht dieselbe Objektivität innewohnt wie den Gegensätzen wahr: falsch und gut.: böse. Daß die ästhetischen Urteile subjektiver als die logischen und ethischen sind, kann nicht iibersehen werden. Auch hier mrnß dies betont werden, da die Stelle, welche von der Ästhetik eingehon.men zu werden pflegt, eigentlich der Geomnetrie zukommt:; Sie allein ist die objektiv apriorische Wissenschaft v.n der reineen Anschauung.

Polargeometrie. 9. Die drei objektiven Gegensätze des Bewußtseins und der Erfahrung zugleich sind diejenigen des Wahren und Falschen, des Guten und Bösen, und des Geraden und Krummen. Der erste Gegensatz liegt der Logik, der zweite der Ethik und der dritte der Geometrie zugrunde. Die Geometrie ist also ein Teil der Philosophie wie die Logik lind Ethik. Man könnte sogar die Ansicht vertreten, daß die kritische Philosophie nur drei Grundwissenschaften umfassen könne, nämlich Logik, Ethik und-Geometrie. Alle anderen Wissenschaften ermangeln der Einfachheit, welche diesen dreien innewohnt. Sogar die Arithmnetik und Algebra ist eine aus logischen und geometischen Voraussetzungen zusammengesetzte Wissenschaft, welche der willkürlichen Erfindung mehr Raum gestattet als die Geometrie, welche unter den drei philosophischen Grundwissenschaften vielleicht die objektivste genannt werden kann. Die Zugehörigkeit der Geometrie zur Philosophie sei hier auch deshalb gebüthrend.hervorgehoben, weil gegenwärtiges Buch eine kritische Grundlegung der Geometrie, auch nach philosophischen Gesichtspunkten, enthält. ~ 89. Bedeutung des

Gesetzes von der Erhaltung der geometrischen Elemente für die Polargeometrie. Wenn die Frage erhoben wird, ob zwei Parallelen sich schneiden oder nicht, sind heute viele Gelehrte geneigt, zu behaupten, das könne man nicht wissen, weil darüber eine unmittelbare objektive Entscheidung nicht vorzuliegen scheint. Die Entscheidung'für den einen oder den anderen Standpunkt sei also bloß eine subjektive Willkür. Demgegenüber verweist die Polargeometrie auf das Gesetz der Erhaltung der geometrischen Elemente (vgl. ~ 37). Wenn dieses zuggegben wird - und es ist dem Bewußtsein unmöglich, es bei klarer Besinnung nicht zuzugeben -, so ist als objektiv und denknotwendig gewährleistet, daß zwei Parallelen sich schneiden und daß eine Gerade reelle Mittelpunkte besitzt. Wenn nicht das Wunder in der Geometrie auf den Thron erhoben werden soll, ist die objektive Eindeutigkeit der Geometrie durch eine erdrückende Fille von Beweisgriünden nachgewiesen. Das Gesetz von 'der Erhaltung der geometrischen Elemente ist der Prüfstein und der-Scheidepunkt der

92 Ernst Barthel, Geister. An ilm wird es klar, ob die gründliche Urteilskraft oder der Wille zum schwankenden Relativismus um jeden Preis ein Bewußtsein beherrscht. ~ 90. Die Bedeutung der Lehrsätze der euklidischen Geometrie innerhalb der Polargeometrie. Die moderne Geometrie weist darauf hin, daß die Annahme einer nichteuklidischen Geometrie auch gewisse sehr bekannte Lchrsatze der Elementargeometrie ausschließe. So lesen wir in Simons Euklidausgabe (S. 35): "Beinahe unmittelbar klar ist, daß das Parallelenaxioni des Euklid sich deckt 1. mit der Existenz des Rechtecks oder, was dasselbe ist, mit dem Satz: Die Winkelsumme im Dreieck ist zwei Rechte, 2. mit der Existenz ähnlicher Dreiecke, 3. mit dem Satz: Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter, 4. mit dem Satz: Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist stets ein Kreis möglich, oder, was dasselbe ist: Zwei Gerade, welche auf sich schneidenden senkrecht stehen, schneiden sich ebenfalls." Die hier vertretene Polargeometrie ist zweifellos eine nichteuklidische Geometrie, aber wohlgemerkt auch eine Geometrie des Unendlichen. Begibt man sich in die Sphäre des Endlichen, so ist die Polargeometrie mit der euklidischen, was die einzelnen Lehrsätze betrifft, völlig identisch. Es besteht also durchaus kein Anlaß zu dem Glauben, so selbstverständliche Sätze wie die obenerwähnten wiirden durch die neue Geometrie verändert werden. Vor einer solchen,.Reformation" des Allersichersten würde man sich mit Rocht s:heuen üiirfen. Sondern die Polargeometrie erkennt, daß der Mensch inm

Verhältnis zum Raum ein unendlich kleines Sandkorn ist, für dessen Anschauungsbereich die altbewährten Lehrsätze volle Gültigkeit besitzen. (~ 20.) Die Polargeometrie ist die Geometrie des Unendlichen, die sich als solche yon der euklidischen wesentlich unterscheidet. Nishtsdestoweniger enthalten ihre Lehrsätze für menschlich kleine Größen nichts, als was mit gutem Recht bei allen Menschen stets als richtig gegolten hat. Gerade weil die Polargeometrie in mancher Hinrsicht reformatorisch geartet scheint, maß sie bei jeder Gelegenheit

Polargeometrie. 93 betonen, daß sie vor den Fundamenten des bisheiigen Denkens viel weniger abweicht als sogar die nichteuklidischen Geometrin. in bisheriger Auffassung, die in der Wissenschaft das Heimatsrecht erworben haben. ~ 91. Die Dreiteilung eines Winkels. Auf dem Boden der euklidischen Geometrie ist bekannflich die Aufgabe, einen beliebigen Winkel mittelst Zirkel und Lineal in drei genau gleiche Teile zu teilen, unlösbar. Es wäre aber zu merkwürdig, wenn ein solches Problem unter allen Umständen unlösbar bleiben sollte. In der Polargeometrie ist denn auch dieses berühmte Problem theoretisch exakt lösbar, obwohl praktisch die betreffende Lösungsmethode aus Mangel an genüigend großen Werkzeugen niemals angewandt werden kann. Die Dreiteilung eines Winkels geschieht auf' Grundlage der Polargeometrie in folgender Weise: Man zeichne den zu teilenden Winkel auf die Ebene und malch seine Schenkel -2 lang. Man verbinde die so gewonnenen Endpunkte der Schenkel durch eine Gerade. Man teile diese Gerade nach elementarem Prinzip in drei gleiche Teile. Man verbinde die beiden Teilpunkte mit dem Scheitel. Dann ist der Winkel in drei gleiche Teile geteilt, was man sich wieder am Kugelglobus anschaulichst klarmachen kann. Praktisch ist diese theoretisch einwandfreie Konstruktion deshalb nicht realisierbar, weil weder eine vollständige Ebene noch Werkzeuge von geeigneten Ausmessungen uns zur Verfügung stehen. ~ 92. Berechnung des Rauminhaltes in beliebigen Kubikeinheiten. Der Raum der objektiven Geometrie hat einen bestimmten Kubik — inhalt. Es fragt sich, wie man ihn berechnet. Man hat zu diesem Zweck folgende Sachverhalte zu beachten' 1. Der Flächeninhalt einer Totalebene ist, wie aus dem Kugelmodell klar ersehen werden kann, gleich dem achtfachen Betrag eines rechtwinklig-gleichseitigen Geradendreiecks. 2. Der Kubikinhalt eines Totalraums ist, wie aus gleichen Gründen hervorgeht, und wie an der Reversionskugel veranschaulicht werden kann, gleich dem sechzehnfachen Betrag eines Tetraeders von der

 19/08/16 13:21

z94 Ernst Barthel, Seitenlange, oder anders ausgedrückt gleich dem sechzehnfachen Betrag eines Tetraeders mit rechten Winkeln. Diese beiden Hauptsätze der Raumberechnung stellen uns vor die Fragen: A. Wie groß ist der Flächeninhalt eines rechtwinklig-gleichseitigen Geradendreiecks? B. Wie groß ist der Kubikinhalt eines rechtwinkligen Tetraeders? Von diesen beiden Fragen kann a priori ausgesagt werden, daß sie unlösbar sind, so bald ausgemacht ist, daß die Länge der Konstanten oo nicht bestimmt angegeben werden kann. Anderseits ist ebenso sicher, daß die beiden Fragen prinzipiell. lösbar sein müssen, so bald ausgemacht ist, welche bestimmte Lange der Naturkonstanten oo zukommt. Nehmen wir also für einen Augenblick an, die Länge der Naturkonstanten oo sei bekannt, und fragen wir uns, auf welche -Weise dann der Inhalt der obengenannten Fläche und des obengenannten Baumteiles ausgemacht werden könnte. Auf diese Frage kann es nur eine einzige Antwort gaben Da die gebräuichlichen stereometrischen Inhaltsformeln auf dem Gebiet des Unendlichen grundsätzlich nicht in Betracht kommen, und' da wir die Formeln zu ihrem Ersatze noch nicht kennen, ist der Fläaheninhalt eines rechtwinklig-gleichseitigen Dreiecks nur auf empirischem Wege bestimmbar, während man auf den Inhalt des entsprechenden Raumteiles nach Analogie schließen kann. Genau wie jemand, der den Inhalt eines Kreises und einer Kugel nicht keinnt, am sichersten dadurch zu einer Beantwortung seiner Frage gelangt, daß er die beiden Figuren durch kleine Einheiten anfüllt und dieselben nachher zählt, so werdeni wir modernen Denker, sobald wir nur Mittel und Wege dazu finden, den Inhalt von Totalebene und Raum auf ebenso primitive, aber auch ebenso sichere Weise bestimmen. Die Polargeometrie ist in ihren ersten Voraussetzungen auf Erfahrung gegründet und sieht sich bezüglich ihrer letzten Aufgabe, der Inhaltsberechnung von Totalebene und. Totalraum, wieder auf die Erfahrung angewiesen. Ja auch die -Länge der Naturkonstanten oo kann sie, wie a, a. O. gezeigt ist, -nur auf dem Wege der Erfahrung feststellen. Wie groß die Konstante.c. ist, will dieses Buch nicht entscheiden. Mag sie nur einige Zehntausend Kilometer betragen oder Tausende von, Lichtjahren" das:ist für

Polargeometrie. 95 die Geometrie als solche gleichgültig. Nachgewiesen ist, daß diese räumliche Weltkonstante co existiert. ~ 93. Empirischer Charakter der Polargeometrie. Durch das Zurückgreifen auf Erfahrung schmeichelt die

Polargeometrie keineswegs den logistischen Bestrebungen in der geometrischen Grundlagenforschung. Aber sie ist zum Ersatz dafür auch um so viel eindeutiger als der Standpunkt, der die Welt der Geometrie aus reinem. Gedankenstoff erschaffen möchte. Man findet in der ganzen Natur bestätigt, daß die geometrischen Größen und Gestalten eine objektive Existenz besitzen. Der Bau der einfachsten Pflanzen und Tiere wie der kunstvolle Bau des menschlichen Körpers oder die Ordnung der Gestirnsbewegungen sagen gleicherweise aus, daß die Geometrie nicht erst vom Menschen geschaffen wird, sondern unabhängig von ihm in der Natur angelegt ist. Wenn also der Mensch in den vieldeutigen Gedankenverläufenl seiner ~logisch möglichen"' Geometrien einen sicheren Kompaß vermißt, so kommt es daher, daß er die allgemeinsten geometrischen Erfahrungen zu gering eingeschätzt hat. Eine Geometrie, die in der Tat gewillt ist, der Erfahrung das erste und letzte Wort zu geben, kommt, wie wir gesehen haben, niemals in Verlegenheit, ihr Prinzip durchzufihren. Welche Neuheiten sich auch bei dieser Gelegenheit ergeben - immer ist sicher, daß sie gründlicher fundiert sind als alle scheinbar besseren Aussagen, die nicht auf eine eindeutig zuverlässige Wurzel zurückgeführt werden können. Das Reformatorische an der Polargeometrie beruht nicht, wie dies bei Neuerungen manchmal der Fall sein soll, auf vermehrter Fahrlässigkeit, sondern, wie jedermann zu kontrollieren in der Lage ist, auf vermehrter Berücksichtigung der Wirklichkeit mit ihren Erfordernissen der Kontinuität und der Erhaltung der geometrischen Elemente. Möge dieser empirische Charakter des neuen, schulgemäßen Systems der nachdenklichen Erwägung seiner Lehren förderlich sein. Die Priorität für die Erkenntnis der logischen Möglichkeit einer solchen Geometrie gebührt Riemann. Die Priorität für die Erkenntnis der Einzigrichtigkeit dieser Geometrie und für die Einzelheiten ihrer Ausführung beansprucht der Verfasser dieses Buches.

Page [unnumbered]